

Fourierreihen- und transformationen

Lucas Böttcher

27. Juli 2013

Die meisten Einführungen in das Themengebiet der Fourierreihen und Transformationen verlaufen über das Studium in mathematischer Strenge und Anwendungsferne, oder aber über die bloße Verwendung von Definitionen. Nachfolgend wurde versucht aus verschiedenen Quellen (Jean-Baptiste Joseph Fourier: Analytische Theorie der Wärme, Skriptum Otto Forster: Fourier-Transformation und Wavelets, Skriptum Brigitte Forster-Heinlein: Fourier- und Laplace-Transformation, Skriptum Michael M. Wolf: Analysis I für Physiker, Tilman Butz: Fouriertransformation für Fußgänger), das für mich Wichtigste herauszuarbeiten.

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	1
2	Grundlegende Definitionen und Sätze	3
2.1	Vektorräume	3
2.1.1	Basen	3
2.1.2	Skalarprodukt	4
2.1.3	Norm	5
2.1.4	Orthogonalisierung	6
2.2	Hilberträume	8
2.2.1	Prä-Hilbertraum	8
2.2.2	Hilbertraum	8
2.2.3	Fourierkoeffizienten im Orthonormalsystem	8
2.2.4	Hilbertraumbasis	9
2.3	Raum quadratintegrierbarer Funktionen	11
3	Fourierreihenentwicklung	12
3.1	Reelle Basis	12
3.2	Komplexe Basis	14
3.3	Theoreme	20
3.3.1	Linearität	20
3.3.2	Skalierung	20
3.3.3	1. Verschiebungssatz	21
3.3.4	2. Verschiebungssatz	21
3.3.5	Differentiation	22
3.4	Konvergenzverhalten	23
3.4.1	Punktweise Konvergenz	26
3.4.2	Absolute und gleichmäßige Konvergenz	26
3.4.3	Konvergenz im quadratischen Mittel	27
4	Fouriertransformation	28
4.1	Kontinuierliche Fouriertransformation	28
4.2	Theoreme	31
4.2.1	Linearität	31
4.2.2	Skalierung	31
4.2.3	1. Verschiebungssatz	32
4.2.4	2. Verschiebungssatz	32

Inhaltsverzeichnis

4.2.5	Differentiation	33
4.3	Distributionen	35
4.4	Faltung	42
4.4.1	Kreuzkorrelation	44
4.4.2	Autokorrelation	45
5	Diskrete Fouriertransformation	46

1 Motivation

Wie vielleicht schon anhand des Names vermutet werden kann, gehen die Gedanken zu dieser Art der Reihendarstellung auf den französischen Naturforscher Jean-Baptiste Joseph Fourier zurück. Begonnen werden soll an dieser Stelle mit einer Einführung in die Arbeiten Fouriers. Im Verlaufe der nächsten Kapitel und verschiedener Beispiele wird man sehen, welche wichtige Entwicklung durch Fourier angestoßen wurde. In seinen ausführlichen Abhandlungen über die *Analytische Theorie der Wärme* beschreibt Fourier auf den ersten einhundert Seiten ausdauernd Wärmeleitungsprozesse in Ringen endlicher und unendlicher Ausdehnung, in abkühlenden Würfeln in Eiswasser und Luft und in unendlich langen Zylindern und Prismen. In einem späteren Kapitel setzt er sich mit der allgemeinen Ausdehnung der Wärme an einer Grenzfläche auseinander. Zu bemerken ist noch, dass die Arbeiten anfangs auf starke Ablehnung stießen, da es auf den ersten Blick nicht sehr intuitiv schien mithilfe periodischer Basisfunktionen andere Funktionen darzustellen.

Beispiel 1 (Wärmeleitung an grenzenden Kanten). *Für die allgemeine Wärmeausbreitung in Körpern wird von ihm folgende lineare, homogene Differentialgleichung erster Ordnung verwendet:*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = C \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (1.1)$$

Die Änderungsrate in z-Richtung verfällt, da Fourier in diesem Fall den Ausbreitungsprozess zweier unendlich ausgedehnter Platten der Breite T voraussetzt und ein Wärmeausgleich nur homogen an den grenzenden Rändern der Platten stattfindet.

Unterliegt am Ende des Prozesses die Temperatur der Platten keiner Änderung, nennt man dies den stationären Zustand und vereinfacht:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (1.2)$$

Für diese Differentialgleichung findet Fourier eine partikuläre Lösung $v(x, y) = \exp(-\lambda x) \cos(\lambda y)$ und leitet aus dieser eine allgemeinere Lösung

durch Linearkombination der Partikulären ab¹:

$$v(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \exp(-(2k+1)x) \cos(2k+1)y \quad (1.3)$$

Nun handelt es sich wie beschrieben um eine Grenzfläche mit der, auf einer Seite definierten Temperatur 1. Für diese (bei $x = 0$ und $-T/2 < y < T/2$) gilt:

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos(2k+1)y \quad (1.4)$$

Wie sich in Kapitel 2 zeigen wird, erinnert dieses Beispiel schon sehr an die Fourierreihendarstellung eines Rechteckpulses auf dem Intervall $[-T/2, T/2]$.

Die sich hier stellende Frage, ist die nach der Bestimmung der Koeffizienten a_{2k+1} aus den Randbedingungen. Mit geeigneten Methoden der Linearen Algebra in Verbindung mit topologischen Begriffen aus der Analysis, lassen sich die aufkommenden Fragestellungen und Antworten auf ein solides Fundament stellen.

Neben dieser historischen Einführung ist die gesamte Fourieranalysis auch heute ein wichtiger Bestandteil verschiedener Wissenschaftsdisziplinen. Nachfolgend ein paar Anwendungsbeispiele (konkrete Diskussion in späteren Kapiteln):

- Approximation periodischer Funktionen mithilfe periodischer Basisfunktionen
- Bestimmung des spektralen Gehaltes eines zeitabhängigen Signals
- Lösung bestimmter Differentialgleichungen (Wellengleichungen, Schwingkreis)
- Digitales Filter (Hochpass, Tiefpass, Bandpass)
- Komprimierung, Glättung (Bildverarbeitung)

¹Man kann bemerken, dass $v = v(x, y)$ sich durch einen Produktansatz $v(x, y) = X(x)Y(y)$ darstellen lässt, da obige Gleichung für alle x, y erfüllt werden soll. Das kann man durch Separation der Variablen allgemein lösen.

2 Grundlegende Definitionen und Sätze

Die für die nachfolgenden Kapitel wichtigen Definitionen und Folgerungen sollen nachfolgend genauer erläutert werden. Um firm mit den folgenden Beschreibungen zu werden, sollen auch Beispiele verwendet werden. Diese werden sich im ersten Kapitel nur wenig an den Fourierreihen orientieren, aber doch zum Verständnis der Begriffe beitragen. Grundsätzlich geht die Einführung in die Fourieranalysis den Weg über die Symbiose von linearer Algebra, Topologie und Analysis.

2.1 Vektorräume

Für die Beschreibung der Fourierreihendarstellung ist der Begriff des Vektorraumes unerlässlich, da eine verallgemeinerte Definition die Untersuchung von Funktionen (bspw. Polynomen) als Vektoren zulässt und sich damit auch elementare Eigenschaften (bspw. des euklidischen Vektorraumes) übertragen lassen.

Definition 1 (Vektorraum). *Seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +)$ eine abelsche Gruppe, dann heißt V ein K Vektorraum mit $\cdot : K \times V \rightarrow V$, wenn weiterhin für die definierte äußere Verknüpfung also $\forall u, v \in V, \forall \alpha, \beta \in K$ gilt:*

$$i) \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$$

$$ii) \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$$

$$iii) (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$$

$$iv) 1 \cdot v = v$$

2.1.1 Basen

Die Beschreibung der einem Vektorraum zugehörigen Elemente setzt ein entsprechend Basissystem voraus, gegenüber dem man diese Elemente darstellt. Die Basisvektoren sind allesamt linear unabhängig.

Definition 2 (Lineare Unabhängigkeit). *Seien $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n\}$ Elemente eines Vektorraumes V über dem Körper K . Diese heißen genau dann linear unabhängig, wenn gilt:*

$$0 = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i \tag{2.1}$$

, wobei für alle $\lambda_i \in K$ gilt: $\lambda_i = 0$.

2.1.2 Skalarprodukt

Für die spätere Berechnung der Fourierkoeffizienten spielt die Projektion von periodischen Funktionen auf die Basisfunktionen eine wichtige Rolle. Man definiert für diese Projektion ein Skalarprodukt im Reellen oder Komplexen, je nach Art der Basen, wenn die folgenden Punkte erfüllt sind:

Definition 3 (Skalarprodukt).

i) $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

1. *Bilinearität:*

- $\langle u | v_1 + v_2 \rangle = \langle u | v_1 \rangle + \langle u | v_2 \rangle$
- $\langle u_1 + u_2 | v \rangle = \langle u_1 | v \rangle + \langle u_2 | v \rangle$
- $\langle \lambda u | v \rangle = \lambda \langle u | v \rangle = \langle u | \lambda v \rangle$

2. *Symmetrie:* $\langle u | v \rangle = \langle v | u \rangle$

3. *Positive Definitheit:* $\langle u | u \rangle \geq 0, u = 0 \Rightarrow \langle u | u \rangle = 0$

ii) $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$

1. *Sesquilinearität:*

- $\langle u | v_1 + v_2 \rangle = \langle u | v_1 \rangle + \langle u | v_2 \rangle$
- $\langle u_1 + u_2 | v \rangle = \langle u_1 | v \rangle + \langle u_2 | v \rangle$
- $\langle \lambda u | v \rangle = \bar{\lambda} \langle u | v \rangle$
- $\langle u | \lambda v \rangle = \lambda \langle u | v \rangle$

2. *Hermizität:* $\langle u | v \rangle = \overline{\langle v | u \rangle}$

3. *Positive Definitheit:* $\langle u | u \rangle \geq 0, u = 0 \Rightarrow \langle u | u \rangle = 0$

2.1.3 Norm

Für Konvergenzbegriffe und die für die Fourieranalysis definierten Räume ist die Einführung einer Norm, wie in den nächsten Kapiteln ersichtlich, wichtig.

Definition 4 (Norm). Seien $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ oder $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ Abbildungen in den Körper bzw. Skalarprodukte. Dann heißt

$$\| \cdot \| : x \rightarrow \sqrt{\langle x | x \rangle} \tag{2.2}$$

die Norm auf V .

Satz 1 (Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung). In einem normierten Vektorraum V gilt folgende Ungleichung für die Elemente $u, v \in V$:

$$|\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \tag{2.3}$$

Bei linearer Abhängigkeit von $u, v \in V$ gilt Gleichheit.

Beweis. Bewiesen wird nachfolgend speziell im Komplexen: Für $u=0$ folgt der Satz direkt. Für $u \neq 0$ und $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle u - \lambda v | u - \lambda v \rangle &= \langle u - \lambda v | u \rangle - \bar{\lambda} \langle u - \lambda v | v \rangle \\ &= \langle u | u \rangle - \lambda \langle v | u \rangle - \bar{\lambda} \langle u | v \rangle + |\lambda|^2 \langle v | v \rangle \end{aligned} \tag{2.4}$$

mit $\lambda = \langle u | v \rangle \cdot \|v\|^{-2} = \overline{\langle v | u \rangle} \cdot \|v\|^{-2}$ folgt: $|\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ □

Jede Norm induziert durch die Definition eines Abstandsmaßes, durch $d(x, y) = \|x - y\|$ eine Metrik.

2.1.4 Orthogonalisierung

Besonders schöne Eigenschaften zeigen Orthogonal- bzw. Orthonormalbasen bestimmter Vektorräume, gerade in der geeigneten Darstellung von Projektionen.

Definition 5 (Orthogonalsystem). *Die Elemente $(v_i)_{i \in I}$ eines Vektorraumes V bilden ein Orthogonalsystem bezüglich eines Skalarproduktes $\langle \cdot | \cdot \rangle$, wenn für alle $i \neq j \in I$ gilt: $\langle v_i | v_j \rangle = 0$.*

Es wird nachfolgend das Kronecker-Delta bezeichnet mit:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.5)$$

Definition 6 (Orthonormalsystem). *Erfüllen die Elemente $(v_i)_{i \in I}$ eines Vektorraumes V bezüglich eines Skalarproduktes $\langle \cdot | \cdot \rangle$ zusätzlich die Bedingung für alle $i \neq j \in I$: $\langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij}$, so nennt man diese auf die Länge 1 normierten Vektoren ein Orthonormalsystem.*

Bevor es an die Orthogonalisierung in allgemeinen Vektorräumen geht, zuerst ein Beispiel im \mathbb{R}^2 welches den nachfolgend beschriebenen Algorithmus für allgemeine Vektorräume verdeutlichen soll.

Beispiel 2 (Orthogonalisierung im \mathbb{R}^2). *Man betrachte zu allererst ein Basissystem des \mathbb{R}^2 : $\text{Lin}\{(3, 4)^t, (1, 2)^t\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Um ein Orthogonalsystem zu erhalten, wähle man den ersten Basisvektor $w_1 = (3, 4)^t$. Nun wird die orthogonale Projektion von $v_2 = (1, 2)^t$ auf w_1 berechnet:*

$$v_2^\perp = w_2 = v_2 - \langle v_2 | b_1 \rangle \cdot b_1 \|b_1\|^{-2} = (-8/25, 6/25)^t$$

Man rechnet leicht nach, dass: $\langle w_1 | w_2 \rangle = 0$ gilt.

Möchte man die gewonnene Orthogonalbasis noch orthonormalisieren, muss man die Vektoren gegenüber dem Standardskalarprodukt normieren und erhält: $b_1 = (3/5, 4/5)^t, b_2 = (-4/5, 3/5)^t$.

Man macht sich diesen Algorithmus zu nutze und erhält einen wichtigen Satz zur Othogonalisierung:

Satz 2 (Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren). *Seien V ein Vektorraum mit dem definierten Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$, $(v_i)_{i \in I}$ ein Basissystem, dann erhält man eine Orthogonalbasis $(w_i)_{i \in I}$ durch:*

$$w_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle w_j | v_i \rangle}{\|w_j\|} w_j, i = 1, \dots, n \quad (2.6)$$

Beweis. Der Beweis wird mittels Induktion geführt. Jeder n-te konstruierte Vektor steht senkrecht auf allen anderen. Für $i=1$ wählt man den vorhandenen Vektor. Für den Induktionsschritt von $i \rightarrow i - 1$ und $k \neq j$ gilt:

$$\langle w_i | w_k \rangle = \langle v_i | w_j \rangle - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle w_j | v_i \rangle}{\|w_j\|^2} \langle w_j | w_k \rangle = \langle v_i | w_j \rangle - \frac{\langle w_k | v_i \rangle}{\|w_k\|^2} \langle w_k | w_k \rangle = 0 \quad (2.7)$$

□

2.2 Hilberträume

Nach grundlegenden Definitionen aus der linearen Algebra soll nun mithilfe topologischer Begriffe ein geeigneter Raum für die Fourierreihenentwicklung gefunden werden. Für den Raum integrierbarer Funktionen mit definierter Addition und Multiplikation bezüglich skalarer Größen verwendet man den Begriff des Hilbert-Raumes. Es handelt sich meist um unendlichdimensionale Vektorräume, die durch ein definiertes Skalarprodukt eine Norm erhalten und durch diese eine Metrik induziert wird. Mit diesen Hilfsmitteln lassen sich später auch verschiedene Konvergenzeigenschaften untersuchen.

2.2.1 Prä-Hilbertraum

Definition 7 (Prä-Hilbertraum). *Ein komplexer Vektorraum V mit einem definierten Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, heißt Prä-Hilbertraum.*

2.2.2 Hilbertraum

Definition 8 (Hilbertraum). *Ein Prä-Hilbertraum V der vollständig gegenüber der durch das Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ induzierten Norm $\| \cdot \| : x \rightarrow \sqrt{\langle x | x \rangle}$ ist, heißt Hilbertraum. Jede Cauchyfolge konvergiert in der Norm von V .*

2.2.3 Fourierkoeffizienten im Orthonormalsystem

Definition 9 (Fourierkoeffizienten im Orthonormalsystem). *Seien V ein Hilbertraum und $(b_i)_{i \in I}$ ein Orthonormalsystem, dann sind die Fourierkoeffizienten eines Elementes $v \in V$ definiert durch:*

$$(\langle v | b_i \rangle)_{i \in I} \tag{2.8}$$

Satz 3 (Approximation im Orthonormalsystem). *Seien V ein Hilbertraum und $\{b_1, \dots, b_n\}$ ein endliches Orthonormalsystem und sind die Fourierkoeffizienten eines Elementes $v \in V$ durch $\gamma_i := \langle v | b_i \rangle$ definiert. Für eine weitere beliebige Wahl von Koeffizienten $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ gilt:*

$$\|v - \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i\| \geq \|v - \sum_{i=1}^n \gamma_i b_i\| \quad (2.9)$$

$$\|v - \sum_{i=1}^n \gamma_i b_i\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{i=1}^n |\gamma_i|^2 \quad (2.10)$$

Beweis. Zu beweisen ist damit die beste Approximation eines Elementes $v \in V$ gegenüber des gewählten Orthonormalsystems $\{b_1, \dots, b_n\}$. Für dieses Orthonormalsystem gilt insbesondere der Satz des Pythagoras in folgender Form:

$$\|a + b\|^2 = \langle a + b | a + b \rangle = \langle a | a \rangle + \langle a | b \rangle + \langle b | a \rangle + \langle b | b \rangle = \|a\|^2 + \|b\|^2 \quad (2.11)$$

Damit ergibt sich die Ungleichung aus:

$$\begin{aligned} \|v - \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i\|^2 &= \|(v - \sum_{i=1}^n \gamma_i b_i) + (\sum_{i=1}^n (\gamma_i - \alpha_i) b_i)\|^2 \\ &= \|v - \sum_{i=1}^n \gamma_i b_i\|^2 + \sum_{i=1}^n |(\gamma_i - \alpha_i)|^2 \geq \|v - \sum_{i=1}^n \gamma_i b_i\|^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Für den zweiten Teil des Satzes folgt wiederum mit der gezeigten Pythagoras Folgerung:

$$\|v - \sum_{i=1}^n \gamma_i b_i\|^2 + \sum_{i=1}^n |\gamma_i|^2 = \|v - \sum_{i=1}^n \gamma_i b_i + \sum_{i=1}^n \gamma_i b_i\|^2 = \|v\|^2 \quad (2.13)$$

□

2.2.4 Hilbertraumbasis

Definition 10 (Hilbertraumbasis). *Seien V ein Hilbertraum und $v \in V$, dann heißt ein abzählbares Orthonormalsystem $(b_i)_{i \in I}$ Hilbertraumbasis, wenn sich jedes Element $v \in V$ fourier-entwickeln lässt, also gilt:*

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v|b_i \rangle b_i \quad (2.14)$$

Zusammen mit Satz 3 erhält man folgendes Korollar:

Korollar 1 (Bessel- und Parseval-Ungleichung). *Für ein gegebenes abzählbares Orthonormalsystem $(b_i)_{i \in I}$ eines Hilbertraumes gilt für eine Teilmenge $J \subset I$:*

Parsevalsche Identität

$$\|v\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle v|b_i \rangle|^2 \quad (2.15)$$

Bessel-Ungleichung

$$\|v\|^2 \geq \sum_{i \in J} |\langle v|b_i \rangle|^2 \quad (2.16)$$

Beweis. Parsevals Identität folgt direkt aus der Darstellung bezüglich der Hilbertbasis. Die Ungleichung Bessels ist eine direkte Folge der Darstellung durch die Teilmenge $J \subset I$. □

Aus der Bessel-Ungleichung lässt sich wiederum das Riemann-Lebesque-Lemma ableiten.

Lemma 1 (Riemann-Lebesque). *Seien V ein Hilbertraum und $(b_i)_{i \in I}$ ein Orthonormalsystem, dann folgt für beliebige Elemente $v \in V$:*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle v|b_i \rangle = 0 \quad (2.17)$$

Beweis. Da $\sum_{i \in I} |\langle v|b_i \rangle|^2 < \infty$ auf dem Hilbertraum V ist insbesondere $\langle v|b_i \rangle$ eine Nullfolge. □

2.3 Raum quadratintegrierbarer Funktionen

Nebem dem Hilbertraumkonzept bietet sich für die Anwendung der Fourierreihendarstellung ein anderer mathematischer Raum an. Betrachtet werden später integrierbare Funktionen, denen ein Skalarprodukt zugeordnet wird, welches eine Norm definiert. Der Weg führt über den L^2 -Raum, ein Hilbertraum und damit ein spezieller Banachraum. Man kann durchaus auch über dem L^1 arbeiten, jedoch bietet der L^2 die Möglichkeit der Definition eines Skalarproduktes, was für die nachfolgenden Kapitel von Vorteil ist.

Definition 11 (L^2 -Raum). *Der Hilbertraum der quadratintegrierbaren Funktionen L^2 ist für eine Abbildung, ein Signal $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ durch folgende Bedingung und ein Skalarprodukt definiert:*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (2.18)$$

$$\langle f(t)|g(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\bar{g}(t)dt \quad (2.19)$$

Dabei hängt der Integrationsbereich für das definierte Skalarprodukt auch von der Art der zu betrachtenden Abbildungen ab. Es bietet sich an dieser Stelle an sich bereits ein paar Worte zu des später verwendeten Basissystems zu verlieren und zu klären welche Abbildungen für die weiteren Betrachtungen in Frage kommen. Im allgemeinen handelt es sich wie definiert um Abbildungen nach \mathbb{C} . Für die weiteren Kapitel sind vor allem für $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ folgende Möglichkeiten wichtig:

- $f(t) = f(t + kp)$ (p -periodisches Signal mit $k \in \mathbb{Z}$)
- $T \in \mathbb{R}$ (zeitkontinuierliches Signal)
- $T \in \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ (zeitdiskrete Signale)
- $T \in [a, b]$ (Signal auf beschränkten Intervall)

3 Fourierreihenentwicklung

Nach einigen Grundbegriffen wird nun die Reihenentwicklung nach Fourier Hauptbestandteil der nächsten Seiten sein. Mit der Einführung des L^2 -Raumes ist ein geeignetes Basissystem zu finden. Zu beantwortende Fragen sind also Orthogonalität (bzw. Orthonormalität) und Vollständigkeit. Für die Fourierreihen wird eine Darstellung von p -periodischen Funktionen gegenüber einem trigonometrischen Basissystem verwendet. Mit der eulerschen Identität führt dies auf zwei mögliche Basisdefinitionen.

3.1 Reelle Basis

Definition 12 (Reelles, trigonometrisches System). *Sei die p -periodische Abbildung $f(t)$ Element des $L^2[0, T]$, und $\text{Lin}\{\cos(\omega kt), \sin(\omega kt)\} \subseteq L^2[0, T]$, mit $\omega = 2\pi/T$, dann lässt sich gemäß der Hilbertbasisdarstellung für das n -te Fourierpolynom schreiben:*

$$F_n[f(t)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(\omega kt) + b_k \sin(\omega kt) \quad (3.1)$$

, wobei a_k, b_k die k -ten Fourierkoeffizienten bezeichnet.

Es wurde für diese Definition eine allgemeinere Darstellung der Reihe verwendet und diese nicht nur auf Funktionen der Periode 2π beschränkt. Für $\omega = 1$ erhält man diesen Spezialfall. Dieses trigonometrische System sollte, um für die geforderten Anwendungen Verwendung zu finden und der Definition zu genügen linear unabhängig sein. Der nachfolgende Satz zeigt diese Eigenschaft.

Satz 4 (Lineare Unabhängigkeit des reellen, trigonometrischen Systems). *Das reelle, trigonometrische System $\text{Lin}\{\cos(\omega kt), \sin(\omega kt)\} \subseteq L^2[0, T]$ ist linear unabhängig.*

Beweis. Der Beweis wird über $L^2[0, T]$ geführt, womit das folgende Skalarprodukt die lineare Unabhängigkeit zeigt ($k, l \in \mathbb{N}$):

$$\langle \cos(\omega kt) | \sin(\omega lt) \rangle = \int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega kt) \sin(\omega lt) dt = 0 \quad (3.2)$$

$$\langle \cos(\omega kt) | \cos(\omega lt) \rangle = \int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega kt) \cos(\omega lt) dt = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}, & k=l \neq 0 \\ \frac{2\pi}{\omega} = T, & k=l=0 \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\langle \sin(\omega kt) | \sin(\omega lt) \rangle = \int_0^{2\pi/\omega} \sin(\omega kt) \sin(\omega lt) dt = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}, & k=l \neq 0 \\ 0, & k=l=0 \end{cases} \quad (3.4)$$

□

Für den Beweis wurden folgende Identitäten verwendet:

- $\cos(\alpha) \sin(\beta) = 1/2(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$
- $\cos(\alpha) \cos(\beta) = 1/2(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$
- $\sin(\alpha) \sin(\beta) = 1/2(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$

Die lineare Unabhängigkeit konnte so gezeigt werden. Gleichzeitig wird klar, dass bei geeigneter Normierung $2/T$ für alle a_k, b_k und $1/T$ für a_0 ein Orthonormalsystem gewonnen werden kann. Der Beweis zur Vollständigkeit des Systems wird für die komplexe Darstellung erbracht. Wie genau erhält man nun die Fourierkoeffizienten?

Satz 5 (Fourierkoeffizienten der reellen Fourierbasis). *Für die reelle Fourierbasis $\text{Lin}\{\cos(\omega kt), \sin(\omega kt)\} \subseteq L^2[0, T]$ ergeben sich die Fourierkoeffizienten über die Projektion auf die Basis wie folgt:*

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (3.5)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega kt) dt \quad (3.6)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega kt) dt \quad (3.7)$$

Beweis. Mit der vorherigen Begründung erhält man durch geeignete Normierung ein Orthonormalsystem. Nach der Hilbertbasisdarstellung ergibt das genau die gefundenen Skalarprodukte auf dem $L^2([0, T])$. Für a_0 geht nur der Kosinusanteil ein. \square

Man kann durchaus den Beweis noch über Integration der in Definition 12 beschriebenen Reihe führen. Auch dieser Beweis wird für die komplexe Basis geführt werden.

3.2 Komplexe Basis

Je nach Anwendung erleichtert man sich das Arbeiten, indem man auf eine andere Basisdefinition zurückgreift. So lassen sich doch einige Beweise eleganter in komplexer Schreibweise führen. Wie bereits erwähnt nutzt man die eulersche Identität $e^{i\omega kt} = \cos(\omega kt) + i\sin(\omega kt)$ und erhält mit den reellen Basisfunktionen:

$$\cos(\omega kt) = 1/2(e^{i\omega kt} + e^{-i\omega kt}) \quad (3.8)$$

$$\sin(\omega kt) = 1/2i(e^{i\omega kt} - e^{-i\omega kt}) \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} F_n[f(t)] &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2}(e^{i\omega kt} + e^{-i\omega kt}) + \frac{b_k}{2i}(e^{i\omega kt} - e^{-i\omega kt}) \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k)e^{i\omega kt} + (a_k + ib_k)e^{-i\omega kt} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Für die Kosinusfunktion gilt: $f(-t) = f(t)$, ist also gerade, für die Sinusfunktion $f(-t) = -f(t)$, also ungerade. Damit kann man für die erhaltenen Reihenkoeffizienten abkürzend schreiben (beachte konjugiert komplexe Ausdrücke negative Koeffizienten werden zugelassen):

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad (3.11)$$

$$c_k = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad (3.12)$$

$$c_{-k} = \frac{a_k - ib_k}{2} \quad (3.13)$$

Definition 13 (Komplexes, trigonometrisches System). *Sei die p -periodische Abbildung $f(t)$ Element des $L^2[0, T]$, und $\text{Lin}\{e^{i\omega kt}\} \subseteq L^2[0, T]$, mit $\omega = 2\pi/T$, dann lässt sich gemäß der Hilberbasisdarstellung schreiben:*

$$F_n[f(t)] = \sum_{k=-n}^n c_k e^{i\omega kt} \quad (3.14)$$

, wobei c_k die k -ten Fourierkoeffizienten bezeichnet.

Wie für die reelle, trigonometrische Basis gilt es hier wieder die lineare Unabhängigkeit zu zeigen.

Satz 6 (Lineare Unabhängigkeit des komplexen, trigonometrischen Systems). *Das komplexe, trigonometrische System $\text{Lin}\{e^{i\omega kt}\} \subseteq L^2[0, T]$ ist linear unabhängig.*

Beweis. Wieder wird der Beweis über $L^2[0, T]$ geführt, womit das folgende Skalarprodukt die lineare Unabhängigkeit zeigt ($k, l \in \mathbb{N}$):

$$\langle e^{i\omega kt} | e^{i\omega lt} \rangle = \int_0^{2\pi/\omega} e^{i\omega(k-l)t} dt = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ \frac{2\pi}{\omega} = T, & k = l \neq 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

□

Wieder findet man durch geeignete Normierung mit $1/T$ eine Orthonormalbasis und gelangt zu folgendem Satz.

Satz 7 (Fourierkoeffizienten der komplexen Fourierbasis). *Für die komplexe Fourierbasis $\text{Lin}\{e^{i\omega kt}\} \subseteq L^2([0, T])$ ergeben sich die Fourierkoeffizienten über die Projektion auf die Basis wie folgt:*

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (3.16)$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega kt} dt \quad (3.17)$$

Beweis. Ein Argumentationsweg läuft über das definierte Skalarprodukt auf dem $L^2([0, T])$ mit der komplex-konjugierten Funktion und der orthonormalen Hilbertbasis. Jedoch hier wie angekündigt ein alternativer Weg über die Integration der Reihendarstellung, um die c_k zu extrahieren:

$$f(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{i\omega kt} \quad (3.18)$$

Mit Multiplikation $e^{-i\omega kt}$ und einem Indexshift ($+k$ erhält man:

$$f(t) e^{-i\omega kt} = \sum_{k=-n-k}^{n-k} c_{l+k} e^{i\omega(k+l)t - i\omega kt} = \sum_{k=-n-k}^{n-k} c_{l+k} e^{i\omega lt} \quad (3.19)$$

Konvergenzeigenschaften sollen erst später betrachtet werden (ohne Beweis vertauschen von Integral und Summe). Integration über eine volle Periode liefert (beachte für $k \neq 0$ genau 0 und $l = 0$ folgt T):

$$\int_0^T f(t) e^{-i\omega kt} dt = \sum_{k=-n-k}^{n-k} c_{l+k} \int_0^T e^{i\omega lt} dt = T c_k \quad (3.20)$$

Daraus erhält man für die Koeffizienten c_k :

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega kt} dt \quad (3.21)$$

□

Für die gefundenen Basen soll nun noch gezeigt werden, dass es sich um sinnvolle Systeme handelt, diese also Vollständig sind und damit der Definition genügen.

Satz 8 (Vollständigkeit des Basissystems). *Das komplexe, trigonometrische Basissystem $\text{Lin}\{e^{i\omega kt}\} \subseteq L^2([0, T])$ ist auf dem definierten Raum vollständig.*

Beweis. Für den Beweis wird schon etwas auf die nächsten Kapitel vorgegriffen. Die Reihendarstellung für die gewählte Funktion $f \in L^2([0, T])$ ist gegeben durch die Reihe der Approximierten $f_A(t)$:

$$f_A(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega kt} \quad (3.22)$$

Aus den gefundenen Orthogonalitätsrelationen (Satz 6) folgt, dass $f(t)$ und $f_A(t)$ die selben Koeffizienten besitzen):

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f_A(t) e^{-i\omega kt} dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega kt} dt \quad (3.23)$$

Mit der Hilfsfunktion $g(t) = f(t) - f_A(t)$ folgt:

$$\int_0^T g(t) e^{-i\omega kt} dt = \int_0^T (f(t) - f_A(t)) e^{-i\omega kt} dt = c_k - c_k = 0 \quad (3.24)$$

Zu zeigen ist nun noch, dass $g(t)=0$. Man definiert eine weitere Funktion $h_m(t) = d_m \left(\frac{1+\cos(\omega t)}{2}\right)^m$ für die folgende Punkte erfüllt sind:

- An den Rändern 0 und T fällt $h_m(t)$ auf 0.
- Für $t=0$ ist $h_m(t) = 1$, für große m wird die Spitze immer schmaler
- Die Koeffizienten d_m sind so bestimmt, dass: $\int_0^T d_m \left(\frac{1+\cos(\omega t)}{2}\right)^m dt = 1$

Eine weitere notwendige Definition ist die Deltadistribution² mit der Faltung $\delta * g(t) = \int_0^T g(u) \delta_{t-u} du = g(t)$. Da $h_m(t)$ nach der eulerschen Identität als Summe von Kosinus und Sinus Funktionen dargestellt werden kann, gilt mit den Orthogonalitätsbedingungen:

²Für diesen Beweis wurde schon etwas vorgegriffen. Eine genauere Beschreibung der Distributionentheorie findet man im Kapitel über Fouriertransformationen unter 4.3 und ein paar Worte zur Faltung unter 4.4.

$$h_k(t) * g(t) = \int_0^T g(u)h_k(t-u)du = 0 \quad (3.25)$$

Es handelt sich für $\lim_{m \rightarrow \infty} h_k(t) = \delta$, womit folgt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h_k(t) = 0 \quad (3.26)$$

$$\delta * g(t) = g(t) \quad (3.27)$$

, sodass $g(t)=0$ □

Richtig genommen ist es erst jetzt (nach dem Vollständigkeitsatz) legitim bei den trigonometrischen Systemen aus den Definitionen 12 und 13 von Basissystemen zu sprechen. Eine weitere Bemerkung, die das Arbeiten für manche Reihenentwicklung vereinfacht folgt aus der Projektion der Funktion auf das verwendete Basissystem $b(t)$:

- $f(-t) = f(t) : \Im\{b(t)\} = 0$ - nur Kosinusanteile
- $f(-t) = -f(t) : \Re\{b(t)\} = 0$ - nur Sinusanteile

Für spätere Kapitel wichtig und als Abschluss dieses Kapitels wird nun ein periodischer Dreieckspuls über seine Fourierreihe dargestellt.

Beispiel 3 (Dreieckspuls). *Man bezeichne $Tri(t)$ als einen Dreieckspuls, der folgender Definition genügt:*

$$Tri(t) := \begin{cases} 1 - \frac{|2t|}{T}, & |t| \in [0, T/2] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.28)$$

Vor der Koeffizientenberechnung sind ein paar Überlegungen notwendig: Der Dreieckspuls besitzt aufgrund seiner Spiegelsymmetrie nur Kosinusanteile. Die Berechnung lässt durch die Symmetrieeigenschaft reduzieren auf:

$$\frac{T}{2} \cdot c_k = \underbrace{\int_0^{T/2} \cos(\omega kt) dt}_{=0} - \int_0^{T/2} \cos(\omega kt) \frac{2t}{T} dt = \left[\frac{\cos(\omega kt)}{\omega^2 k^2} \right]_0^{T/2} \quad (3.29)$$

3 Fourierreihenentwicklung

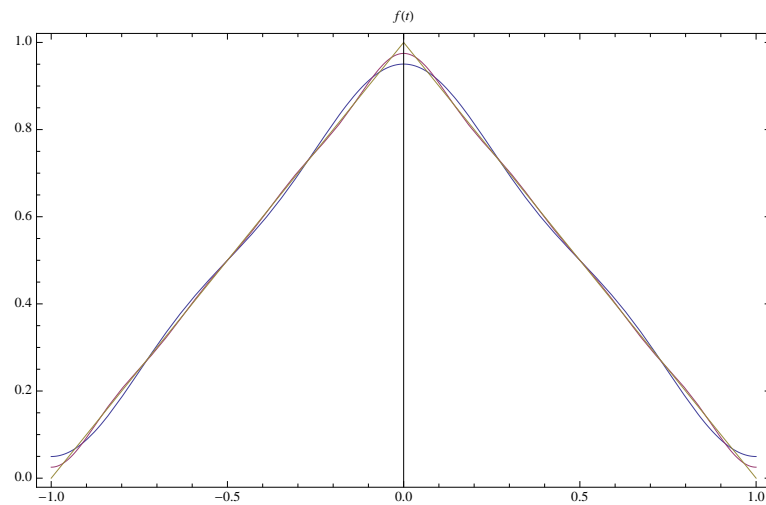


Abbildung 1: Fourierreihe für einen Dreieckpuls ($n = 3, 8$ und $tri(x)$
 $T = 2$)

Für $k=0$ erhält man trivial:

$$c_0 = \int_0^{T/2} 1 - \frac{2t}{T} dt = T/4 \quad (3.30)$$

Formt man diese Ergebnisse um lässt sich der Dreieckpuls der Periode T nach Fourier in eine Reihe entwickeln:

$$Tri_k(t) = \frac{T}{4} + \sum_{k=0}^n \frac{2T \cos(((2k+1)\omega t))}{(2k+1)^2 \pi^2} \quad (3.31)$$

3.3 Theoreme

Aus den gewonnenen Definitionen und Sätzen werden nun einige Theoreme für die Reihenoeffizienten abgeleitet, die bei Berechnungen helfen können Zeit einzusparen und gewisse Sachverhalte verdeutlichen.

3.3.1 Linearität

Satz 9 (Linearitätstheorem). *Seien $f(t)$ und $g(t)$ Elemente des $L^2([0, T])$, dann folgt für die Fourierkoeffizienten $c_{k(h)}$ der Abbildung $h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$:*

$$c_{k(h)} = \alpha c_{k(f(t))} + \beta c_{k(g(t))} \quad (3.32)$$

Beweis. Folgt direkt aus der Reihendarstellung von $f(t)$ bzw. $g(t)$ und der Linearität der Summe, sodass die Skalare α und β vorgezogen werden können. \square

3.3.2 Skalierung

Satz 10 (Skalierungstheorem). *Seien $f(t)$ und $f(at)$ Elemente des $L^2([0, T])$, dann folgt für die Fourierkoeffizienten c_k und den Parameter $\omega(at)$ der Abbildung $f(at)$:*

$$c_{k(f(at))} = c_{k(f(t))} \quad (3.33)$$

$$\omega(at) = a \cdot \omega(t) \quad (3.34)$$

Beweis. Es gilt für die Fourierkoeffizienten unter Verwendung der Substitution $at = t'$:

$$c_{k(f(at))} = \frac{1}{T} \int_0^T f(at) e^{-\omega kt} dt = \frac{1}{aT} \int_0^{aT} f(t') e^{-\omega kt'/a} dt' \quad (3.35)$$

Für $\omega(at) = a \cdot \omega(t)$ folgt nun die Behauptung. □

Einen Sonderfall stellt die Skalierung mit dem Faktor $a = -1$ dar. Man erhält für zeitabhängige Funktionen damit eine Spiegelung am Ursprung der Zeit- und (als direkte Konsequenz) der Frequenzachse.

3.3.3 1. Verschiebungssatz

Satz 11 (Verschiebung in der Zeitdomäne). *Sei $f(t) \in L^2([0, T])$, dann folgt für die Fourierkoeffizienten c_k bei der Verschiebung in der Zeitdomäne gemäß $f(t - a)$:*

$$c_{k(f(t-a))} = c_{k(f(t))} e^{-i\omega ka} \tag{3.36}$$

Beweis. Es gilt für die Fourierkoeffizienten unter Verwendung der Substitution $t - a = t'$:

$$c_{k(f(t-a))} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t - a) e^{-i\omega kt} dt = \frac{1}{T} \int_{-a}^{T-a} f(t') e^{-i\omega k(t'+a)} dt' = c_{k(f(t'))} e^{-i\omega ka} \tag{3.37}$$

□

3.3.4 2. Verschiebungssatz

Satz 12 (Verschiebung in der Frequenzdomäne). *Sei $f(t) \in L^2([0, T])$, dann folgt für die Fourierkoeffizienten c_k bei der Verschiebung in der Frequenzdomäne gemäß $f(t)e^{i\omega at}$:*

$$c_{k(f(t))} e^{-i\omega ka} = c_{k-a(f(t))} \tag{3.38}$$

Beweis. Es gilt für die Fourierkoeffizienten:

$$c_{k(f(t))} e^{-i\omega ka} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega t(k-a)} dt = c_{k-a(f(t))} \tag{3.39}$$

□

3.3.5 Differentiation

Satz 13 (Differentiation). *Sei $f(t) \in L^2([0, T])$ mit der definierten Ableitungsfunktion $f'(t) \in L^2([0, T])$, dann folgt für die Fourierkoeffizienten $c_k(t)$:*

$$c_{k(f'(t))} = i\omega k \cdot c_{k(f(t))} \quad (3.40)$$

Beweis. Es gilt für die Fourierkoeffizienten (einmal partiell integrieren):

$$c_{k(f'(t))} = \frac{1}{T} \int_0^T f'(t) e^{-i\omega kt} dt = i\omega k \cdot c_{k(f(t))} \quad (3.41)$$

□

3.4 Konvergenzverhalten

Es steht noch eine Untersuchung der Konvergenzeigenschaften der gefundenen Reihendarstellung $f(t)$ aus. Es wurden bereits die Vollständigkeit und die Darstellung bezüglich der Hilbertbasis ausgenutzt, jedoch Konvergenz nicht weiter berücksichtigt, obwohl diese gleichermaßen ein Indikator für eine vollständige Hilbertbasis ist. Diese Frage soll nun geklärt werden. Vorab sind dafür noch einige Definitionen nötig.

Definition 14 (Dirichlet-Kern). *Der Dirichlet Kern $D_n(\omega t)$ definiert sich durch:*

$$D_n(\omega t) := \sum_{k=-n}^n e^{i\omega kt} \quad (3.42)$$

Lemma 2 (Eigenschaften Dirichlet-Kern). *Aus Definition 14 folgt direkt:*

- i) $D_n(\omega t) = \frac{\sin((n+1/2)\omega t)}{\sin(\omega t/2)}$
- ii) $\sum_{k=-n}^n c_k e^{i\omega kx} = \frac{1}{T} \int_0^T f(x-t) D_n(\omega t) dt$
- iii) $\frac{1}{T} \int_0^T D_n(\omega t) dt = 1$

Beweis. Man beweist die erste Folgerung durch eine Teleskopsummendarstellung und eine Erweiterung mit $e^{-i\omega t/2}$. Im zweiten Schritt wird $x - z = t$ substituiert. Die Integralgrenzen sind gleichermaßen verschoben, sodass noch über eine volle Periode integriert wird. Die Folgerung ergibt genau 1 für $k=0$.

- i) $D_n(\omega t)(e^{i\omega t} - 1) = \sum_{k=-n}^n e^{i(k+1)\omega t} - e^{i\omega kt} = e^{i(n+1)\omega t} - e^{in\omega t}$
 $\Leftrightarrow D_n(\omega t) = \frac{e^{i(n+1)\omega t} - e^{in\omega t}}{e^{i\omega t} - 1} \Leftrightarrow D_n(\omega t) = \frac{e^{i(n+1/2)\omega t} - e^{i(n+1/2)\omega t}}{e^{i\omega t/2} - e^{-i\omega t/2}} = \frac{\sin((n+1/2)\omega t)}{\sin(\omega t/2)}$
- ii) $\sum_{k=-n}^n c_k e^{i\omega kx} = \frac{1}{T} \int_0^T f(z) \sum_{k=-n}^n e^{i\omega k(x-z)} dz = \frac{1}{T} \int_x^{T+x} f(x-t) D_n(\omega t) dt$
- iii) $\frac{1}{T} \int_0^T D_n(\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=-n}^n e^{i\omega kt} dt = 1 + \underbrace{\frac{1}{T} [(i\omega k)^{-1} e^{i\omega kt}]_0^T}_{=0} = 1$

□

Es folgt nun ein Beispiel, welches nicht unbedingt an die Konvergenz anschließt, aber dennoch verschiedenste Bereiche des Kapitels über Fourierreihen aufgreift und ein interessantes Resultat liefert. Auch die Anwendung der Dirichlet-Integral Darstellung wird nachfolgend ersichtlich.

Beispiel 4 (Gibbs-Ringing). *Das sogenannte Gibbs-Ringing bezeichnet ein Überschwingen bei Reihendarstellungen von zu approximierenden Funktionen. Es tritt jedoch nicht nur bei Fourierreihen auf. Je nach Basiswahl sind auch andere Reihen davon betroffen. Es sei folgende periodisch fortsetzbare Funktion gegeben:*

$$f(t) = \begin{cases} -a/2, & -T/2 \leq t < 0 \\ a/2, & 0 < t \leq T/2 \end{cases}$$

Nach Lemma 2 bietet sich folgende Darstellung für die Fourierreihe an:

$$\begin{aligned} F_n[f(t)] &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{i\omega k t} = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{T} \int_0^T f(z) e^{-i\omega k z} dz \cdot e^{i\omega k t} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(z) \sum_{k=-n}^n e^{i\omega k(t-z)} dz = \frac{1}{T} \int_0^T f(t-x) D_n(\omega x) dx \end{aligned}$$

Um die Funktion $f(t)$ darstellen zu können, wird das Intervall aufgeteilt. Es gilt:

$$-T/2 \leq t-x < 0 \tag{3.43}$$

$$0 < t-x \leq T/2 \tag{3.44}$$

Aus den Bedingungen (62), (63) lässt sich das Integral schreiben als:

$$\begin{aligned} F_n[f(t)] &= \frac{1}{T} \int_{-T/2+t}^t \frac{a}{2} D_n(\omega x) dx - \frac{1}{T} \int_t^{T/2+t} \frac{a}{2} D_n(\omega x) dx \\ &= \frac{a}{2T} \left[\int_{-T/2+t}^t D_n(\omega x) dx - \int_t^{T/2+t} D_n(\omega x) dx \right] \end{aligned} \tag{3.45}$$

Man verwendet nun für den Dirichlet-Kern und die Lösung des Integrals (64) die Beziehung $D_n(\omega x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(\omega k x)$, woraus folgt:

$$\begin{aligned} F_n[f(t)] &= \frac{a}{2T} \left[\int_{-T/2+t}^t 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(\omega k x) dx - \int_t^{T/2+t} 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(\omega k x) dx \right] \\ &= \frac{a}{2T} \left[[x]_{-T/2+t}^t - [x]_t^{T/2+t} + 2 \sum_{k=1}^n \left[\frac{\sin(\omega k x)}{\omega k} \right]_{-T/2+t}^t - 2 \sum_{k=1}^n \left[\frac{\sin(\omega k x)}{\omega k} \right]_t^{T/2+t} \right] \\ &= \frac{a}{T} \left[\sum_{k=1}^n \left[\frac{\sin(\omega k x)}{\omega k} \right]_{-T/2+t}^t - \left[\frac{\sin(\omega k x)}{\omega k} \right]_t^{T/2+t} \right] = \frac{4a}{T} \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2(\pi k/2) \sin(\omega k t)}{\omega k} \end{aligned} \tag{3.46}$$

3 Fourierreihenentwicklung

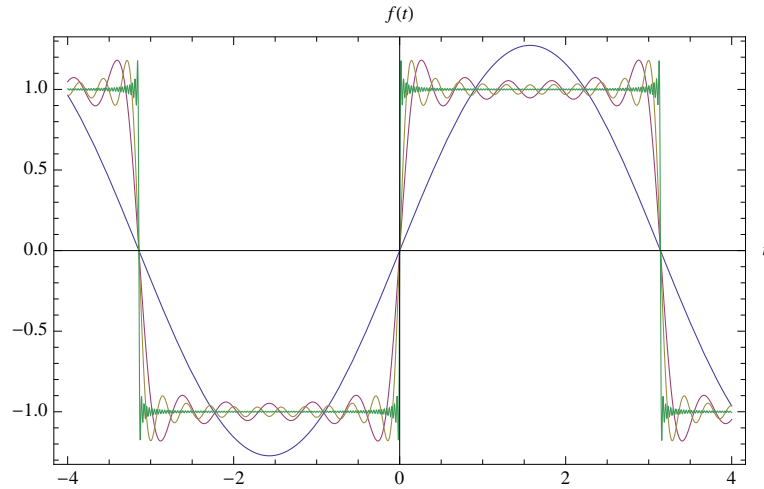


Abbildung 2: Fourierreihe für einen Rechteckpuls ($n = 1, 5, 10, 100$, $T = 2\pi, a = 1$)

Die gefundene Fourierreihe enthält nur ungerade Terme. Man kann damit auch schreiben:

$$F_n[f(t)] = \frac{4a}{T} \sum_{k=0}^n \frac{\sin(\omega(2k+1)t)}{\omega(2k+1)} \quad (3.47)$$

Man erkennt in der Darstellung der Fourierreihe, dass bei der gegebenen Höhe von $a=1$ an den Sprüngen Überschwingungen zu erkennen sind. Auch für große n verschwinden diese auch nicht. Welchen Betrag weisen diese nun im Allgemeinen auf? Man erinnert sich dazu an die Definition des Riemann-Integrals und erhält die Riemann-Summe aus (66) für $t \rightarrow 0$ und $z = \omega(2k+1)t$:

$$F_n[f(t)] = \frac{2a}{\pi} \int_0^{(2n+1)\omega t} \frac{\sin(z)}{z} dz \quad (3.48)$$

Die Extrema bestimmt man durch $dF_n(f(t))/dt = 0$ und erhält für die oberen Integralgrenzen b für $n \rightarrow \infty$ als Werte $b_1 = \pi$ und $b_2 = 2\pi$. Damit ergeben sich für die ersten beiden Extrema:

$$F_n[f(t)] = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(z)}{z} dz = 1,179 \cdot a \quad (3.49)$$

$$F_n[f(t)] = \frac{2a}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(z)}{z} dz = 0,903 \cdot a \quad (3.50)$$

Diese Abweichungen nennt man Overshoot bzw. Undershoot. Es ergibt sich für den ersten Peak eine Abweichung von der Grundintervallbreite von rund

18 % für große n nach oben. Diese Ringing Effekte treten bei allen Unstetigkeitsstellen periodisch fourier-approximierter Funktionen auf und nehmen die berechneten Werte an. Dieses Beispiel zeigt auch auf, dass Konvergenzbegriffe gerade an Sprungstellen keinesfalls einfach zu klären sind, sodass für die nachfolgenden Betrachtungen Stetigkeit gefordert wird.

3.4.1 Punktweise Konvergenz

Zuerst wird sich auf den Fall lipschitzstetiger Funktionen beschränkt. Für Funktionen mit Sprüngen an Periodenübergängen (Beispiel 4) verwendet man ein anderes Konzept. Über die rechts- und linksseitigen Grenzwerte $(f_-(t), f_+(t))$ der zu approximierenden Funktion findet man:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n[f(t)] = f(t) = (f_-(t) + f_+(t))/2 \quad (3.51)$$

Satz 14 (Punktweise Konvergenz von Fourierreihen). *Sei $f(t) \in L^2([0, T])$ und lipschitzstetig, dann konvergiert die Fourierreihendarstellung punktweise gegen die Grenzfunktion $f(t)$.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{i\omega kt} = f(t)$.

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{i\omega kt} - f(t) \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (f(x-t) - f(t)) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \sin((n+1/2)\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (g(t) \cos(\omega t/2)) \sin(n\omega t) + (g(t) \sin(\omega t/2)) \cos(n\omega t) dt = 0 \end{aligned}$$

Man verwendet für die Umformungen die gefundenen Beziehungen zum Dirichlet-Kern aus Lemma 2 und definiert $g(t) = (f(x-t) - f(t))/\sin(\omega kt/2)$ Der letzte Schritt ergibt sich aus der Umformung ins trigonometrische Basissystem und den Fourierkoeffizienten, die nach Lemma 1 (Riemann-Lebesque) für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 gehen. \square

3.4.2 Absolute und gleichmäßige Konvergenz

Die punktweise Konvergenz würde sich ebenfalls aus der absoluten bzw. gleichmäßigen Konvergenz ableiten lassen. Für den nachfolgenden Beweis sind

doch zusätzliche Bedingungen notwendig.

Satz 15 (Absolute und gleichmäßige Konvergenz). *Sei $f(t) \in L^2([0, T])$ und stetig-differenzierbar, dann konvergiert die Fourierreihendarstellung absolut und gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f(t)$.*

Beweis. Ausgehend von der Ableitungsfunktion $f'(t) \in L^2([0, T])$ und der Bessel-Ungleichung aus Korollar 1:

$$\sum_{k=-n}^n c_{k(f'(t))} \leq \|f'(t)\|^2 < \infty \quad (3.52)$$

Aus Satz 13 folgt aus den Differentiationseigenschaften für die Fourierkoeffizienten $c_{k(f'(t))}$:

$$c_{k(f'(t))} = i\omega k \cdot c_{k(f(t))} \quad (3.53)$$

Mit diesem Wissen lässt sich für die Koeffizienten mithilfe der Cauchy-Schwarz Ungleichung (Satz 1) zeigen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n |c_{k(f'(t))}| &= \sum_{k=-n}^n |i\omega k \cdot c_{k(f'(t))} \cdot \frac{1}{i\omega k}| = \sum_{k=-n}^n |c_{k(f(t))} \cdot \frac{1}{i\omega k}| \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=-n}^n |c_{k(f(t))}|^2 \sum_{k=-n}^n |(i\omega k)^{-1}|^2} < \infty \end{aligned}$$

□

3.4.3 Konvergenz im quadratischen Mittel

Eine weitere, was die definierte Norm L^2 -Norm angeht auch sehr intuitive Form der Konvergenz erhält man mit der bereits gezeigten Approximation im Orthonormalsystem aus Satz 2.

Definition 15 (Konvergenz im quadratischen Mittel). *Sei $f(t) \in L^2([0, T])$, dann konvergiert das Fourierpolynom im quadratischen Mittel gegen die Funktion $f(t)$, wenn gilt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(t) - F_n[f(t)]\| = 0 \quad (3.54)$$

Die Normkonvergenz erlaubt jedoch keine Rückschlüsse auf gleichmäßige oder punktweise Konvergenz.

4 Fouriertransformation

Im letzten Kapitel wurden periodische Funktionen durch Fourierreihen approximiert. Betrachtet man retrospektiv die Funktionen als zeitabhängig, wählen die gefundenen Fourierkoeffizienten in den Partialsummen bestimmte Frequenzen in den trigonometrischen Termen aus. Zusammenfassend war man auf periodisch-fortsetzbare Funktionen beschränkt. Eine Erweiterung der Begriffe führt auf erweiterte Integraldarstellungen, welche es ermöglichen zeitabhängige Funktionen auf ihre Frequenzbilder zu transformieren.

4.1 Kontinuierliche Fouriertransformation

Für einen Übergang in ein kontinuierliches Spektrum für nicht periodische Funktionen soll über den gesamten Funktionenraum integriert werden, also $T \rightarrow \infty$ und $n \rightarrow \infty$. Ausgehend von der Reihendarstellung sind noch einige Umformungen notwendig. Für diese Grenzwertbetrachtungen gilt: $\omega(k+1) - \omega k = \omega$.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-n}^n \int_{-T/2}^{T/2} f(z) \cdot e^{-i\omega k z} dz \cdot e^{i\omega k t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n (\omega(k+1) - \omega k) \int_{-T/2}^{T/2} f(z) \cdot e^{-i\omega k z} dz \cdot e^{i\omega k t} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Wieder kann man Gleichung (78) als Riemann-Summe auffassen. Mit den geforderten Grenzwerten geht die Darstellung über in:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cdot e^{-i\omega z} dz \right] e^{i\omega t} d\omega \quad (4.2)$$

Diese Darstellung ist zugegebenerweise etwas ad-hoc. Für die verwendete Funktion sollte gelten: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$. Gleichung (79) überführt die Funktion einmal in ihr Spektrum und zum anderen wieder in die Ausgangsfunktion. Diese Überlegungen führen zu folgender Definition.

Definition 16 (Fouriertransformation- und synthese). *Sei $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, dann nennt man folgende Ausdrücke Fouriertransformation und Fouriersynthese.*

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (4.3)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad (4.4)$$

Oft werden die Ausdrücke (80), (81) der Symmetrie wegen auf $1/\sqrt{2\pi}$ normiert. Das ändert zwar lediglich den Betrag der Transformatierten, kann aber dadurch zu Fehlern führen. Für die gefundenen Transformationsgleichungen bietet es sich an weitere Eigenschaften in speziellen Räumen zu untersuchen. Die betrachteten Funktionen sollten glatt und stetig sein, also $f \in \mathcal{C}^\infty$. Eine weitere Annahme führt zur Definition des Schwartz-Raumes³, ein Teilraum des Raumes der glatten Funktionen, welche zusätzlich schnell-abfallen und die Elemente durch folgende Definition eine Majorante aufweisen.

Definition 17 (Schwartz-Raum). *Die Funktionen $\varphi(t)$ sind Elemente des Schwartz-Raumes $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \sup_{t \in \mathbb{R}^n} (t^\alpha D^\beta \varphi(t)) < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\} \quad (4.5)$$

Hier bezeichnet $D = d\varphi/dt$ den Differentialoperator. Man nennt diesen Vektorraum, auch Raum der temperierten Funktionen und nutzt dabei die definierte Norm:

$$\|\varphi(t)\|_{\alpha, \beta} := \sup_{t \in \mathbb{R}^n} (t^\alpha D^\beta \varphi(t)) \quad (4.6)$$

Wie später unter 4.2.5 bewiesen wird findet man analog zu den Fourierreihen folgenden Zusammenhang zur Differentiation:

- $\widehat{D^\beta \varphi}(\omega) = (i\omega)^\beta \cdot \widehat{\varphi}(\omega)$
- $D^\beta \widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{(-it)^\beta \varphi}(\omega)$

Man schlussfolgert damit folgendes Korollar.

Korollar 2 (Fouriertransformation im Schwartz-Raum). *Die Fouriertransformation einer temperierten Funktion $\varphi(t)$ ist wieder temperiert.*

Beweis. Es gilt für die Suprema $\sup_{t \in \mathbb{R}^n} (\omega^\alpha D^\beta \widehat{f}(\omega))$ eine geeignete Majorante zu finden. Man definiert:

$$\varphi(t) := t^\beta f(t) \quad (4.7)$$

, womit für die Fouriertransformierte gilt:

$$\widehat{\varphi}(\omega) = (-i)^\beta D^\beta \widehat{f}(\omega) \quad (4.8)$$

³, von Laurent Schwartz im Zuge seiner Arbeiten in der Fourieranalysis definiert.

$$|\widehat{D^\alpha \varphi}(\omega)| = |\omega^\alpha \widehat{\varphi}(\omega)| = |\omega^\alpha D^\beta \widehat{f}(\omega)| \quad (4.9)$$

Damit gilt nun folgende Abschätzung auf der L^2 Norm:

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}^n} |(\omega^\alpha D^\beta \widehat{f}(\omega))| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |D^\alpha \varphi(t) e^{-i\omega t}| dt < \infty \quad (4.10)$$

Nach Riemann-Lebesque und $|e^{-i\omega t}| = 1$ gilt die Integralabschätzung. \square

Lemma 3 (Stetigkeit im Schwartz-Raum). *Die Fouriertransformation ist eine stetige lineare Abbildung auf dem Schwartz-Raum.*

Beweis. i) Linearität folgt unmittelbar (zusätzlich unter 4.2.1 für Skalare)

ii) Stetigkeit betrachtet man mit einer Nullfolge $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ und schätzt analog zu Korollar 2 ab:

$$\varphi_n(t) := t^k D^\beta f_n(t) \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \sup_{\omega \in \mathbb{R}^n} |(\omega^\alpha D^\beta \widehat{f}_n(\omega))| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |D^\alpha \varphi_n(t) e^{-i\omega t}| dt \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}^n} (|D^\alpha \varphi_n(t)| t^2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t^2} dt \end{aligned} \quad (4.12)$$

Nun gilt mit der Leibniz-Differentiationregel für Produkte:

$$D^\alpha \varphi_n(t) = \sum_{i=0}^n D^i t^k D^{n-i} f_n(t) \quad (4.13)$$

Für fest gewähltes k konvergieren nach Voraussetzung die f_n gegen 0, damit auch die abzuschätzenden Suprema, woraus folgt: $\widehat{f}_n(\omega) \rightarrow 0$. \square

Zusammenfassend kann man bei der Fouriertransformation von einer stetigen und wohldefinierten linearen Abbildung auf dem Schwartz-Raum sprechen. Da sowohl hin- als auch Rücktransformation (-synthese) existiert, kann man die Ergebnisse in folgendem Satz zusammenfassen:

Satz 16 (Fouriertransformation als Automorphismus). *Die Fouriertransformation ist ein Automorphismus auf dem Schwartz-Raum.*

Beweis. Die Fouriertransformation bildet nach Korollar 2 Elemente des Schwartz-Raumes auf selbigen ab, wobei es sich um eine lineare Abbildung handelt. Mit der Rücktransformation erhält man Bijektivität. \square

Man könnte noch von der Stetigkeit von einem Homöomorphismus sprechen. Der Schwartz-Raum eignet sich also gut, um einige Eigenschaften der Fouriertransformation genauer zu untersuchen.

4.2 Theoreme

Wieder sollen für die definierte Transformation einige Theoreme abgeleitet werden, die einige Eigenschaften verdeutlichen und Rechnungen eventuell vereinfachen. Die Theoreme zeigt man analog zu den Fourierkoeffizienten im vorherigen Kapitel.

4.2.1 Linearität

Satz 17 (Linearitätstheorem). *Seien $f(t)$ und $g(t)$ Elemente des $L^2(\mathbb{R})$, dann folgt für die Fouriertransformierte $\widehat{h}(\omega)$ der Abbildung $h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$:*

$$\widehat{h}(\omega) = \alpha \cdot \widehat{f}(\omega) + \beta \cdot \widehat{g}(\omega) \quad (4.14)$$

Beweis. Folgt direkt aus der Reihendarstellung von $f(t)$ bzw. $g(t)$ und der Linearität der Transformationsintegrale, sodass die Skalare α und β vorgezogen werden können. \square

4.2.2 Skalierung

Satz 18 (Skalierungstheorem). *Seien $f(t)$ und $D_a(t) = f(at)$ Elemente des $L^2(\mathbb{R})$, dann folgt für die Fouriertransformierte $\widehat{f}(S_a(t))$:*

$$\widehat{f}(S_a(t)) = a^{-1} \cdot \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (4.15)$$

Beweis. Es gilt für die Fouriertransformierte unter Verwendung der Substitution $at = t'$:

$$\widehat{f}(S_a(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t} dt = a^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-i\omega t'/a} dt' = a^{-1} \cdot \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (4.16)$$

\square

4.2.3 1. Verschiebungssatz

Satz 19 (Verschiebung in der Zeitdomäne). Sei $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, dann folgt für die Fouriertransformierte $\hat{f}(T_a(t))$ bei der Verschiebung in der Zeitdomäne gemäß $T_a(t) = f(t - a)$:

$$\hat{f}(T_a(t)) = \hat{f}(\omega)e^{-i\omega ka} \quad (4.17)$$

Beweis. Es gilt für die Fourierkoeffizienten unter Verwendung der Substitution $t - a = t'$:

$$\hat{f}(T_a(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - a)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-i\omega(t'+a)} dt' = \hat{f}(\omega)e^{-i\omega ka} \quad (4.18)$$

□

4.2.4 2. Verschiebungssatz

Satz 20 (Verschiebung in der Frequenzdomäne). Sei $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, dann folgt für die Fouriertransformierte $\hat{f}(F_a(t))$ bei der Verschiebung in der Frequenzdomäne gemäß $F_a(t) = f(t)e^{i\omega at}$:

$$\hat{f}(F_a(t)) = \hat{f}(\omega - a) \quad (4.19)$$

Beweis. Es gilt für die Fouriertransformierte:

$$\hat{f}(F_a(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\omega-a)t} dt = \hat{f}(\omega - a) \quad (4.20)$$

□

4.2.5 Differentiation

Satz 21 (Differentiation). *Sei $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ mit der definierten Ableitungsfunktion $f'(t) \in L^2(\mathbb{R})$, dann folgt für die Fouriertransformierte $\hat{f}'(\omega)$:*

$$\hat{f}'(\omega) = i\omega \cdot \hat{f}(\omega) \quad (4.21)$$

Beweis. Es gilt für die Fouriertransformierte (einmal partiell integrieren):

$$\hat{f}'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t} dt = i\omega \cdot \hat{f}(\omega) \quad (4.22)$$

□

Vor dem Übertritt in den nächsten Abschnitt soll nun das vor allem aus der Physik bekannte Unschärfeprinzip mathematisch diskutiert werden.⁴ Die Theorie der Fouriertransformation liefert dafür eine gute Grundlage.

Satz 22 (Unschärferelation der Fouriertransformation). *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und deren Fouriertransformierte $\hat{f}(\omega)$, dann gilt:*

$$\langle f, t^2 f \rangle \langle \hat{f}, \omega^2 \hat{f} \rangle \geq \pi \|f\|^2 \quad (4.23)$$

, wobei $\|f\| = 1$, also normiert ist und folgende Definitionen gemäß der definierten L^2 -Norm gelten:

$$\langle f, t^2 f \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|^2 dx \quad (4.24)$$

$$\langle \hat{f}, \omega^2 \hat{f} \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} |\omega f(\omega)|^2 dx \quad (4.25)$$

Beweis. Man beachte die Definition auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, woraus folgt:

$$\Re(\langle Df, tf \rangle) = \int_{-\infty}^{\infty} x \left| \frac{d}{dx} f(x) \right|^2 dx = -\frac{1}{2} \|f\|^2 \quad (4.26)$$

⁴Der Impuls und Ort eines Quantensystems sind gemeinsam nicht beliebig genau bestimmbar.

Das ermöglicht eine Abschätzung über die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und die Identität über den Satz von Plancherel (Satz 27), der im nächsten Abschnitt begründet wird ⁵:

$$\frac{1}{2}\|f\|^2 \leq |\langle Df, tf \rangle| \leq \|Df\|^2 \|tf\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{Df}\|^2 \|tf\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\omega \hat{f}\|^2 \|tf\|^2 \quad (4.27)$$

□

⁵Aufgrund der verwendeten Definition der Normierung der Fouriertransformation unterscheiden sich womöglich andere Darstellungen des Unschärfepinzips.

4.3 Distributionen

Für den Vollständigkeitsbeweis aus Satz 8 wurde schon der Vereinfachung wegen auf die Deltadistribution δ zurückgegriffen. Es sollen nun einige Begrifflichkeiten unter dieser Überschrift geklärt werden. Der bereits erwähnte Name Laurent Schwartz spielt wieder eine wichtige Rolle bezüglich des Zusammenspiels von Fourieranalysis und Distributionentheorie. Zur Veranschaulichung kann bei Distributionen von Funktionalen sprechen, welche Funktionen als Definitionsbereich besitzen, vergleichbar mit Funktionen über einem Körper. Diese zugeordneten Funktionen nennt man Testfunktionen.

Definition 18 (Testfunktionen und Konvergenz). *Die Menge der beliebig stetig-differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, also $\varphi(t) \in \mathcal{C}_c^\infty$ bilden den Vektorraum der Testfunktionen $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*⁶

Man nennt eine Folge von Testfunktionen $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent gegen φ , wenn für $K \subset \mathcal{D}$ gilt:

$$\text{supp}(\varphi_n) \subset K \quad (4.28)$$

und die Folge der Ableitungen $(\varphi_n^{(k)})_{k, n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf K gegen ihre Ableitung $\varphi_n^{(k)}$ konvergiert.

Beispiel 5 (Delta-Distribution). *Die schon beschriebene Dirac- oder Delta-Distribution definiert sich wie folgt:*

$$\delta : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C} : \delta_a(\varphi) := \varphi(a), \forall a \in \mathbb{R} \quad (4.29)$$

Natürlich ordnet auch jede Integralfunktion einer anderen Funktion einen Wert zu, was zu nachfolgender Definition führt:

Definition 19 (Integral-Distribution). *Man nennt:*

$$I : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C} : I_f(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt \quad (4.30)$$

die Integral-Distribution.

Die Delta-Distribution wurde nun bereits mehrfach angesprochen, jedoch nie eine Aussage über deren Beschaffenheit gemacht. Folgender Satz zeigt eine mögliche Darstellung auf.

⁶Nachfolgend wird abkürzend die Schreibweise \mathcal{D} verwendet.

Satz 23 (Darstellung der Delta-Distribution). Sei $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ und $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) = 1$. Die Funktionen $\lim_{a \rightarrow 0} f_a := \frac{1}{a} f(\frac{t}{a})$ bilden mit $I : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C} : I_f(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} f_a(\frac{t}{a}) \varphi(t) dt$ ein Funktional, die Delta-Distribution δ , sodass gilt:

$$\lim_{a \rightarrow 0} I_{f_a}(\varphi) = \delta_0(\varphi) = \varphi(0) \quad (4.31)$$

Beweis. Man substituiert $z=t/a$.

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} f_a\left(\frac{t}{a}\right) \varphi(t) dt &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_a(z) \varphi(az) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_a(z) \lim_{a \rightarrow 0} \varphi(az) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(z) \varphi(0) dz = \varphi(0) \end{aligned} \quad (4.32)$$

□

Beispiel 6 (Differentiation der Stufen-Distribution). *Erinnert man sich ein wenig zurück, so konnte in Beispiel 3 der Dreieckspuls durch eine Fourierreihe dargestellt werden. Von gleichmäßiger Konvergenz ausgehend, kann man Differentialoperator und die Summe vertauschen und erhält als Ableitungsfunktion einen Stufenpuls (Abbildung 3). Man kann den Stufenpuls analog differenzieren und erhält eine entsprechend Abbildung, deren Darstellung unübersichtlich wirkt. Der Dreieckspuls war definiert durch:*

$$Tri(t) := \begin{cases} 1 - \frac{|2t|}{T}, & |t| \in [0, T/2] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.33)$$

Man charakterisiert die Ableitung oft einfacher durch die Heaviside-Distribution:

$$H(t) := \begin{cases} 1, & t \in [-T/2, T/2] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.34)$$

Damit erhält man für die geforderte Ableitung: $Tri'(t) = -H(t/2 - T/4) + H(t/2 + T/4)$. Was ist nun die Ableitung der Heaviside-Distribution? Man betrachte dazu die Testfunktion φ mit der Heaviside-Distribution (einmal partielle Integration):

$$\begin{aligned} I_{H'}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} H'(t/2 + T/4) \varphi(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} H'(t/2 - T/4) \varphi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(t/2 - T/4) \varphi'(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} H(t/2 + T/4) \varphi'(t) dt \\ &= \int_0^{T/2} \varphi'(t) dt - \int_{-T/2}^0 \varphi'(t) dt = \delta_{-T/2}(\varphi) - 2\delta_0(\varphi) + \delta_{T/2}(\varphi) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Aufgrund der kompakten Träger sind die Umformungen legitim. Integriert wird nur über die Grenzen für $H(t)=1$. Mithilfe der Distributionentheorie ist es also möglich für die Stufen, bzw. die Heavisidedistribution einen Differentiationsbegriff einzuführen. Man erhält die Dirac-Distribution als Ableitung.

Satz 24 (Testfunktionen auf dem Schwartz-Raum). *Die Abbildung von Testfunktionen auf den Schwartz-Raum, $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{S}$ ist stetig hat dichte Bilder.*

Beweis. Für die Stetigkeit zeigt man das mit der Existenz einer Folge $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{D}} \rightarrow \varphi$, gilt: $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{S}} \rightarrow \varphi$. Die Nullfolge $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{D}}$ ist auf einem kompakten Träger definiert, was die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen beinhaltet. Somit konvergieren die Nullfolgen auch auf der Norm: $\sup_{t \in \mathbb{R}^n} (t^\alpha D^\beta \varphi(t))$ und damit auf dem Schwartz-Raum.

Für eine Teilmenge $U \subset \mathcal{S}$ ist zu zeigen, dass

$$\forall s \in \mathcal{S} \exists (\varphi_n) \in U : \lim_{n \rightarrow \infty} \|s - \varphi_n\| = 0.$$

Um diese Normkonvergenz zu beschreiben, wird die auf einem kompakten Träger $([a, b])$ definierte Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}$ mit dem Parameter γ_n ($[n \cdot a, n \cdot b]$) skaliert und damit eine Folge $f_n = f \cdot \gamma_n \varphi$ ($f \in \mathcal{S}$) gefunden. Die Normkonvergenz beinhaltet:

$$D^\beta(f - f_n) = \sum_{k=0}^m D^k(1 - \gamma_n \varphi) D^{m-k} f \tag{4.36}$$

Nun gilt zusätzlich (unter Berücksichtigung der Streckung):

$$D^k(1 - \gamma_n \varphi) = \frac{1}{n^k} \cdot D^k \varphi \tag{4.37}$$

, für $i \geq 1$. Für eine Abschätzung der Funktionen, ebenfalls unter dem Einfluss der Streckung ist: $\text{supp}(1 - \gamma_n \varphi) \subset \mathbb{R} - [a \cdot n, b \cdot n]$. Damit erhält man für $f \in \mathcal{S}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{\alpha, \beta} = 0 \tag{4.38}$$

□

Für den Beweis wurde die Topologie der Testfunktionen verwendet und damit die gleichmäßige Konvergenz in den Ableitungen.

Definition 20 (Temperierte Distribution). *Eine Distribution $I \in \mathcal{D}$ heißt temperiert, wenn diese auf der von \mathcal{S} auf \mathcal{D} induzierten Topologie stetig ist.*

Satz 25 (Lineare Abbildung auf dem Schwartz-Raum). *Die Distributionen $I \in \mathcal{D}$ können zu einer stetigen, linearen Abbildung auf \mathcal{S} fortgesetzt werden.*

Beweis. Die temperierte Distribution ist stetig in \mathcal{S} . Aus Satz 23 folgt, dass \mathcal{D} ein dichter Teilraum von \mathcal{S} ist und damit stetig fortsetzbar. \square

Nun ist es natürlich ebenfalls denkbar diese Distributionen über eine Fouriertransformation abzubilden. Das führt mit Korollar 2 zu folgendem Satz:

Satz 26 (Fouriertransformation einer temperierten Distribution). *Die Fouriertransformation \mathcal{F} einer temperierten Distribution I :*

$$\hat{I} = \mathcal{F}(I) := I \circ \mathcal{F} \quad (4.39)$$

bildet wieder in den Schwartz-Raum ab.

Beweis. Die Abbildung in den Schwartz-Raum folgt direkt aus Korollar 2. \square

Beispiel 7 (Fouriertransformation der Delta-Distribution). *Im ersten Schritt soll die Fouriertransformierte der Distribution $I_{e^{i\omega a}}$ untersucht werden:*

$$\hat{I}_{e^{i\omega a}}(\varphi) = I_{e^{i\omega a}}(\hat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\omega) e^{i\omega a} d\omega = 2\pi\varphi(a) = 2\pi\delta_a(\varphi) \quad (4.40)$$

Mit der Fouriersynthese erhält man für das betrachtete Funktional, die Delta-Distribution. Diesen Gedankengang kann man umdrehen und betrachtet nun die Delta-Distribution:

$$\hat{\delta}_a(\varphi) = \delta_a(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-iat} dt = I_{e^{-ia}}(\varphi) \quad (4.41)$$

Die Fouriertransformation der Delta-Distribution ergibt das angegebene Funktional.

Erinnert man sich an den Parsevalschen-Identitätssatz, so kann man analog eine Art „Erhaltungssatz“ der Fouriertransformation bezüglich Zeit- und Frequenzdomäne (je nach Interpretation) finden.

Satz 27 (Satz von Plancherel). *Für eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ und deren Fouriertransformierte $\hat{f}(\omega)$ gilt:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (4.42)$$

Beweis. Mit den in Beispiel 7 gefundenen Beziehungen für die Fouriertransformierte der Delta-Distribution zeigt man ⁷:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega^*) e^{-i\omega^* t} d\omega^* \right] dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \hat{f}(\omega^*) e^{it(\omega-\omega^*)} d\omega d\omega^* \right] dt \quad (4.43) \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \hat{f}(\omega^*) \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\omega-\omega^*)} dt d\omega d\omega^* \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \hat{f}(\omega^*) \delta_{\omega-\omega^*} d\omega d\omega^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega
 \end{aligned}$$

□

Satz 28 (Konvergenz des Dirichlet-Kerns). *Der Dirichlet Kern D_n konvergiert als Distribution gemäß:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T} D_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{pk} \quad (4.44)$$

Beweis. Man betrachte die p-periodische Funktion $\phi(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(t + pk)$ mit $\varphi \in \mathcal{D}$. Es gilt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{pk}(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(pk) = \phi(0) \quad (4.45)$$

Weiter zeigt man:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} D_n(\varphi) &= \sum_{k=-n}^n \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{i\omega k t} dt = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_T^{T(l+1)} \varphi(t) e^{i\omega k t} dt \\
 &= \sum_{k=-n}^n \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^T \varphi(t+p) e^{i\omega k t} dt = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^T e^{i\omega k t} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \varphi(t+pl) dt \\
 &= \sum_{k=-n}^n \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^T e^{i\omega k t} \phi(t) dt = \sum_{k=-n}^n c_n(\phi) \quad (4.46)
 \end{aligned}$$

⁷oder etwas intuitiver ohne Delta-Distribution:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{i\omega t} dt d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

Man definiert $c_n(\varphi)$ als die Fourierkoeffizienten, die nach dem Riemann-Lebesque Lemma im Grenzfall für $n \rightarrow \infty$ gegen null gehen. Bis auf eine eventuelle Konstante entspricht dies dem Funktionwert bei $\phi(0)$. Also gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T} D_n(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n(\phi) = \phi(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{pk} \quad (4.47)$$

□

Vor dem Übertritt in den nächsten Abschnitt der Faltungen, soll noch eine wichtige Anwendung der Distributionen und der Fouriertransformation gezeigt werden. Es wird auch schon ein wenig auf den nächsten Seiten vorgegriffen, um gleichzeitig eine Motivation zu schaffen.

Beispiel 8 (Greensche Funktion). *Bestimmte Problemstellungen gehen mit der Lösung linearer, inhomogener Differentialgleichungen einher. Beispielsweise sind elektro-(statische/ magnetische) Simulationen⁸ nach der Momentenmethode teilweise reduzierbar auf folgende Differentialgleichung (bestehend aus Erreger- und Feldfunktion):*

$$D(f(t)) = g(t) \quad (4.48)$$

, wobei $D = \sum_{k=0}^n D^k a_k(t)$ zusätzlich einen linearen Differentialoperator darstellt.

Standardmäßig erhält man eine Allgemeine Lösung $f(t)$ aus homogener- $f_{hom}(t)$ und partikulärer Lösung $f_{inh}(t)$, gemäß: $f(t) = f_{hom}(t) + f_{par}(t)$. Um eine partikuläre Lösung zu erhalten ist nach einem geeigneten Inversen G zum Differentialoperator zu suchen, sodass $f(t) = Gg(t)$ gelte und damit eine mögliche partikuläre Lösung beschrieben wird. Bei L^1 oder L^2 Funktionen bietet es sich an auf Distributionen, in diesem Fall, auf die Delta-Distribution zurückzugreifen, sodass $DG = \delta$.

$$D(f_{par}(t)) = g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t') \delta_{t-t'} dt' = D \int_{-\infty}^{\infty} g(t') G(t-t') dt' \quad (4.49)$$

Hierbei greift man schon auf die Faltung vor, die in diesem Fall aber ohnehin nach der Definition der Delta-Distribution verständlich ist. Man bezeichnet $G(t-t')$ als die Greensche Funktion.

⁸Eine genauere Auseinandersetzung mit der Momentenmethode ist in der Ausarbeitung *Momentenmethode im Simulationsverfahren* zu finden.

Wie schließt man nun für ein bestimmtes Problem auf die Greensche Funktion und die partikuläre Lösung? Man betrachte dazu das Beispiel für den Differentialoperator mit $n = 1$:

$$(a_0(t) + a_1'(t))G(t - t') = \delta_{t-t'} \quad (4.50)$$

Nun liefert die Fouriertransformation die notwendigen Zusatzbedingungen:

$$G(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{G}(\omega) e^{i\omega(t-t')} d\omega \quad (4.51)$$

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega \quad (4.52)$$

Man substituiert in (4.50) und erhält:

$$(a_0(\omega) + i\omega a_1(\omega))\widehat{G}(\omega) = 1 \quad (4.53)$$

Damit erhält man für die Greensche Funktion:

$$G(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a_0(\omega) + i\omega a_1(\omega)} e^{i\omega(t-t')} d\omega \quad (4.54)$$

Man diese Funktion nun für die Lösung verschiedener Inhomogenitäten $g(t)$ verwenden.

4.4 Faltung

Nach diesem Exkurs in die Distributionentheorie, soll der Begriff der Faltung genauer geklärt werden. Neben der Delta-Distribution spielte auch die Faltung eine zentrale Rolle in dem Vollständigkeitsbeweis der Fourierbasis. Die Faltung ermöglicht eine funktionenbasierte Wichtung zu definieren.

Definition 21 (Faltung zweier integrierbarer Funktionen). *Die Faltung zweier Funktionen $f, g \in L^1$ ist definiert als:*

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx \quad (4.55)$$

Erinnert man sich an die Integraldarstellung der Fourierreihenentwicklung mit dem Dirichlet-Kern aus Lemma 2:

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{i\omega k x} = \frac{1}{T} \int_0^T f(x-t)D_n(\omega t)dt \quad (4.56)$$

, wird klar, dass die Faltung eine zentrale Rolle in der Fourier-Analyse spielt. Auch im Gibbs-Ringing Beispiel 4 konnte der Stufenpuls durch eine Faltung approximiert werden.

Satz 29 (Kommutativität der Faltung). *Die Faltung zweier Funktionen $f, g \in L^1$ ist kommutativ:*

$$(f * g)(t) = (g * f)(t) \quad (4.57)$$

Beweis. Mit der Substitution $t' = t - x$ gilt:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(t')f(t-t')dt' = (g * f)(t) \quad (4.58)$$

□

Ebenso lassen sich über die Linearität der Integration die *Distributivität* und *Assoziativität* zeigen.

Satz 30 (Fouriertransformation der Faltung). *Für die Fouriertransformation der Faltung zweier Funktionen $f, g \in L^1$ gilt:*

$$\widehat{(f * g)}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) \quad (4.59)$$

$$(\hat{f} * \hat{g})(\omega) = \widehat{(fg)}(\omega) \quad (4.60)$$

Beweis. Man nutzt den Satz von Fubini zum vertauschen der Integrale und der Substitution $t' = x - t$:

$$\begin{aligned} (\widehat{f * g})(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)e^{-i\omega x} dt dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t')e^{-i\omega(t+t')} dt dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(t')e^{-i\omega t'} dt' = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) \end{aligned} \quad (4.61)$$

Die zweite Aussage ergibt sich unmittelbar unter Verwendung des Transformationsisomorphismus:

$$(\widehat{\hat{f} * \hat{g}})(\omega) = (\hat{f})(\omega)(\hat{g})(\omega) = (\widehat{fg})(\omega) \quad (4.62)$$

Damit gilt ebenfalls:

$$(\hat{f} * \hat{g})(\omega) = (\widehat{fg})(\omega) \quad (4.63)$$

□

Definition 22 (Faltung einer Distribution). *Für die Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}$ und die Distribution I ist die Faltung definiert als:*

$$(I * \varphi)(x) := I(\tau_x \varphi) \quad (4.64)$$

, wobei $(\tau_x \varphi) := \varphi(x - y)$.

Analog können wieder Kommutativität, Distributivität und Assoziativität gezeigt werden. Die Faltung ist für eine Integraldistribution gerade identisch für die eingeführte Definition.

Satz 31 (Faltung der Delta-Distribution). *Für die Faltung einer Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}$ mit der Delta-Distribution δ_y gilt:*

$$(\delta_y * \varphi)(x) = (\tau_y \varphi)(x) \quad (4.65)$$

Beweis.

$$(\delta_y * \varphi)(x) = \delta_y(\tau_y \varphi) = \varphi(x - y) = (\tau_y \varphi)(x) \quad (4.66)$$

□

Nach diesen Betrachtungen soll anhand der Faltung zweier Rechteckpulse der Begriff etwas verdeutlicht werden.

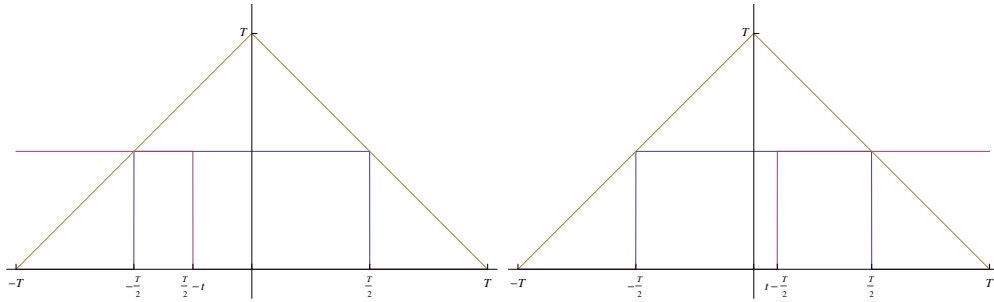


Abbildung 3: Faltung zweier Rechteckpulse (violett und blau mit Integrationsgrenzen) ergibt einen Dreieckspuls (gelb)

Beispiel 9 (Faltung von Rechteckpulsen). *Man betrachte zwei Rechteckpulse $H(t)$ und $H(t)$ die gemäß Definition 21 gefaltet werden:*

$$(H * H)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)H(t-x)dx \quad (4.67)$$

Die Grenzen können aufgeteilt werden. Man betrachtet die nur die Fälle in denen tatsächlich eine Funktion zur Integration definiert ist. Also folgert man über die um t verschobenen Integralgrenzen der symmetrischen Funktionen für $t \leq 0$:

$$\int_{-T/2}^{T/2+t} 1dx = T + t \quad (4.68)$$

und für $t \geq 0$:

$$\int_{-T/2+t}^{T/2} 1dx = T - t \quad (4.69)$$

Fasst man diese Ergebnisse zusammen erhält man einen Dreieckspuls (Abbildung 3):

$$(H * H)(t) = \begin{cases} T - |t|, & t \in [-T, T] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.70)$$

4.4.1 Kreuzkorrelation

Betrachtet man beispielsweise zwei zeitverschobene Signale und hat wiederum vor eine Wichtung zu definieren, ermöglicht die Kreuzkorrelation eine geeignete Untersuchung.

Definition 23 (Kreuzkorrelation). Für zwei Funktionen $f, g \in L^1$ definiert man die Kreuzkorrelation wie folgt:

$$(f \star g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\tau)g(t + \tau)d\tau \quad (4.71)$$

, wobei im komplexen Fall f^* das konjugiert Komplexe von f darstellt.

In diesem Fall lässt sich keine Kommutativität zeigen. Jedoch kann man die Fouriertransformation analog zur Faltung betrachten.

Satz 32. Die Fouriertransformation der Kreuzkorrelation zwei Funktionen $f, g \in L^1$ ergibt:

$$(\widehat{f \star g})(\omega) = \widehat{f^*}(\omega)\widehat{g}(\omega) \quad (4.72)$$

Beweis. Beweis analog zur Fouriertransformation der Faltung. □

4.4.2 Autokorrelation

Es ist zudem möglich die Kreuzkorrelation mit der eigenen Funktion zu betrachten. Dies führt auf die Autokorrelation.

Definition 24 (Autokorrelation). Für zwei Funktionen $f, g \in L^1$ definiert man die autokorrelierte Funktion $h(t)$ wie folgt:

$$h(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\tau)f(t + \tau)d\tau \quad (4.73)$$

, wobei wiederum im komplexen Fall f^* das konjugiert Komplexe von f darstellt.

5 Diskrete Fouriertransformation

Die letzten Kapitel hatten immer die analytische Behandlung verschiedener Problemstellungen in Verbindung mit Fourierreihen- und Transformationen zur Aufgabe. Nun ist es aber für diskrete Messungen oder Approximationen auch von Vorteil ein diskretes Analogon zur Verfügung zu haben. Zuerst wählt man sich ein geeignetes Basissystem mithilfe der Einheitswurzeln $\omega_n := \exp(-\frac{2\pi i}{n})$ in \mathbb{C} . Eine wichtige Eigenschaft der ω_n ist:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{kj} = \begin{cases} n & j = 0 \\ 0 & j \neq 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Wir folgern dies aus der geometrischen Reihe für $j \neq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{kj} = \frac{1 - e^{-\frac{2\pi i}{n} n}}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{n}}} = 0 \quad (5.2)$$

Man definiert nun eine geeignete Basis des \mathbb{C}^n :

$$\text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} \omega_n^{0 \cdot 0} \\ \omega_n^{1 \cdot 0} \\ \omega_n^{2 \cdot 0} \\ \vdots \\ \omega_n^{(n-1) \cdot 0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_n^{0 \cdot 1} \\ \omega_n^{1 \cdot 1} \\ \omega_n^{2 \cdot 1} \\ \vdots \\ \omega_n^{(n-1) \cdot 1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \omega_n^{0 \cdot (n-2)} \\ \omega_n^{1 \cdot (n-2)} \\ \omega_n^{2 \cdot (n-2)} \\ \vdots \\ \omega_n^{(n-1) \cdot (n-2)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_n^{0 \cdot (n-1)} \\ \omega_n^{1 \cdot (n-1)} \\ \omega_n^{2 \cdot (n-1)} \\ \vdots \\ \omega_n^{(n-1) \cdot (n-1)} \end{pmatrix} \right\} \quad (5.3)$$

Diese unitäre Basis gibt Anlass zur Definition einer Transformationsmatrix:

Definition 25 (Fouriermatrix). *Die Fouriermatrix ist die Transformationsmatrix von der unitären Basis des \mathbb{C}^n in die kanonische Basis:*

$$\mathbf{F}_n = \begin{pmatrix} \omega_n^0 & \omega_n^0 & \cdots & \omega_n^0 \\ \omega_n^0 & \omega_n^1 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ \omega_n^0 & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_n^0 & \omega_n^{n-2} & \cdots & \omega_n^{(n-2)(n-1)} \\ \omega_n^0 & \omega_n^{n-1} & \cdots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Desweiteren wird $F := \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{F}_n$ die skalierte Fouriermatrix genannt (n sei aus dem Kontext bekannt). Die diskrete Fouriertransformation lässt sich nun wie folgt definieren:

Definition 26 (Diskrete Fouriertransformation). Für $n \geq 2$ ist die diskrete Fouriertransformation \hat{v} für einen Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ gegeben durch: $\hat{v} = Fv$ mit den Komponenten:

$$\hat{v}_j = (Fv)_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{kj} v_k \quad (5.5)$$

Satz 33. Die Fouriermatrix ist unitär: $\langle Fv, Fw \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{C}^n$ mit $\langle v, w \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} v^* w$ und $F^\dagger = F^{-1}$.

Beweis. $(F^\dagger F)_{lm} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{-lk} \omega_n^{km} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{k(m-l)}$ mit $F^T = F$ und $\omega_n^* = \omega_n^{-1}$

Sei $\eta = \omega_n^{(m-l)}$ für $0 \leq m \neq l \leq n-1$ ist $\eta \neq 1$ und $\eta^n = 1$ damit folgt wiederum mit der geometrischen Reihe, dass $(F^\dagger F)_{lm} = 0$.

Für $(F^\dagger F)_{ll} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 1$ folgt direkt, dass $F^\dagger F = \mathbb{1}$ □

Beispiel 10 (Diskrete Fouriertransformation des diskreten Laplaceoperators). Für $\delta[n] = T[n] - \mathbb{1}_n$, wobei $(T[n])_{ab} = \delta_{a,b-1}$ den Shiftoperator mit $a, b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0, 1, \dots, n-1$ (Addition modulo n), findet man:

$$F\delta[n]^T \delta[n] F^{-1} = \text{diag} \left(4 \sin^2 \left(\frac{j\pi}{n} \right) \right)_{j=0, \dots, n-1} \quad (5.6)$$

Mit der Einsteinschen Summenkonvention (über doppelte Indizes wird summiert) folgt:

$$(\delta[n]^T \delta[n])_{ab} = \delta[n]_{ka} \delta[n]_{kb} = (\delta_{k,a-1} - \mathbb{1}_{ka})(\delta_{k,b-1} - \mathbb{1}_{kb}) \quad (5.7)$$

$$= 2\delta_{ab} - \delta_{b,a-1} - \delta_{a,b-1} = \begin{cases} 2 & a = b \\ -1 & a = b \pm 1 \end{cases} \quad (5.8)$$

Damit folgt für das Anwenden der Fouriermatrix:

$$(F\delta[n]^T \delta[n] F^{-1})_{lm} = F_{lk} (2\delta_{kn} - \delta_{n,k-1} - \delta_{k,n-1}) \bar{F}_{mn} \quad (5.9)$$

$$= n^{-1} \omega_n^{lk} \omega_n^{-mn} (2\delta_{kn} - \delta_{n,k-1} - \delta_{k,n-1}) \quad (5.10)$$

Man kann nun die einzelnen Terme mit der geometrischen Reihe auswerten und erhält:

$$\omega_n^{lk} \omega_n^{-mn} \delta_{kn} = \begin{cases} 0 & l - m \neq 0 \\ n & l - m = 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

$$\omega_n^{lk} \omega_n^{-mn} \delta_{n,k-1} = \begin{cases} 0 & l - m \neq 0 \\ \omega_n^m n & l - m = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

$$\omega_n^{lk} \omega_n^{-mn} \delta_{k,n-1} = \begin{cases} 0 & l - m \neq 0 \\ \omega_n^{-l} n & l - m = 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

Somit erhält man schliesslich:

$$(F\delta[n]^T \delta[n]F^{-1})_{lm} = \begin{cases} n^{-1}(2n - \omega_n^{-l}n - \omega_n^l n) = 4 \sin^2(\frac{\pi l}{n}) & l = m \\ 0 & l \neq m \end{cases} \quad (5.14)$$

Die üblichen Eigenschaften können ebenso gezeigt werden. Interessant an der DFT ist, dass man diese nun für Lösungsverfahren in der numerischen Mathematik verwenden oder zur Frequenzanalyse diskreter Messdaten verwenden kann. Da man schon anhand der Fouriermatrix bemerkt, dass zahlreiche Werte bei einer Transformation mehrfach berechnet werden, kann man die Algorithmen zu Berechnung optimieren. Die Fast-Fourier Transform ist ein optimierter DFT Algorithmus, der aber gesondert diskutiert werden. Dessen Anwendungen sind sehr weitreichend.