PVK Mathematik III
Tag 1

Lucas Böttcher

ETH Zürich
Institut für Baustoffe
Wolfgang-Pauli-Str. 27
HIT G 23.8
8093 Zürich

lucasb@ethz.ch

January 3, 2018

Übersicht

Daten und Zeiten:

Vormittagskurs (08:00-12:30)	Nachmittagskurs (13:30-18:00)
(03.01-04.01 & 08.01-09.01 2018)	(03.01-04.01 2018)
Erste Lektion: 08:00-09:30 Uhr	Erste Lektion: 13:30-15:00 Uhr
Pause: 09:30-09:45 Uhr	Pause: 15:00-15:15 Uhr
Zweite Lektion: 09:45-11:15 Uhr	Zweite Lektion: 15:15-16:45 Uhr
Pause: 11:15-11:30 Uhr	Pause: 16:45-17:00 Uhr
Dritte Lektion: 11:30-12:30 Uhr	Dritte Lektion: 17:00-18:00 Uhr

Übersicht

Ziel PVK: Vorbereitung auf die Prüfung (schriftlich, 120 min)

Übersicht

Ziel PVK: Vorbereitung auf die Prüfung (schriftlich, 120 min)

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (=10 Bl.) eigene Notizen, am PC geschrieben oder von Hand, d.h. eine selbst verfasste oder zu einem guten Teil selber ergnzte bestehende Formelsammlung. Taschenrechner sind nicht erlaubt.

Übersicht

Ziel PVK: Vorbereitung auf die Prüfung (schriftlich, 120 min)

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (=10 Bl.) eigene Notizen, am PC geschrieben oder von Hand, d.h. eine selbst verfasste oder zu einem guten Teil selber ergnzte bestehende Formelsammlung. Taschenrechner sind nicht erlaubt.

Es wird empfohlen die Zusammenfassung für die Hilfsmittel selbst zu erstellen, da das Verfassen den Lernprozess und das Einordnen des Stoffes fördert.

Übersicht

Kursziele laut VVZ:

Studenten sind im Stande

1. Methoden der mehrdimensionalen Analysis und linearen Algebra zum Lösen verschiedener mehrdimensionaler Differentialgleichungen anzuwenden.

Übersicht

Kursziele laut VVZ:

Studenten sind im Stande

1. Methoden der mehrdimensionalen Analysis und linearen Algebra zum Lösen verschiedener mehrdimensionaler Differentialgleichungen anzuwenden.
2. Fourierreihendarstellungen sowie Fourier- und Laplacetransformationen einer gegebenen Funktion zu berechnen und diese Methoden auch zum Lösen von Differentialgleichungen anzuwenden.

Übersicht

Kursziele laut VVZ:
Studenten sind im Stande

1. Methoden der mehrdimensionalen Analysis und linearen Algebra zum Lösen verschiedener mehrdimensionaler Differentialgleichungen anzuwenden.
2. Fourierreihendarstellungen sowie Fourier- und Laplacetransformationen einer gegebenen Funktion zu berechnen und diese Methoden auch zum Lösen von Differentialgleichungen anzuwenden.
3. Biologische und chemische Prozesse mit Kompartimentmodellen zu beschreiben und deren Lösungen zu analysieren.

Übersicht

Kurstag	**Inhalt**
Tag 1	Lineare Algebra, Differentialgleichungen
Tag 2	Kompartimentmodelle, Fourierreihen, Fouriertransformationen, Laplacetransformationen

Kapitel I
Elemente der linearen Algebra
(Sektion 0.4 im Skript)

Elemente der linearen Algebra

Lernziele: Wiederholen von Grundbegriffen aus der linearen Algebra zum späteren Anwenden auf Differentialgleichungen.

Elemente der linearen Algebra

Lernziele: Wiederholen von Grundbegriffen aus der linearen Algebra zum späteren Anwenden auf Differentialgleichungen.

- Determinante

Elemente der linearen Algebra

Lernziele: Wiederholen von Grundbegriffen aus der linearen Algebra zum späteren Anwenden auf Differentialgleichungen.

- Determinante
- Spur

Elemente der linearen Algebra

Lernziele: Wiederholen von Grundbegriffen aus der linearen Algebra zum späteren Anwenden auf Differentialgleichungen.

- Determinante
- Spur
- Matrixexponential

Elemente der linearen Algebra

Lernziele: Wiederholen von Grundbegriffen aus der linearen Algebra zum späteren Anwenden auf Differentialgleichungen.

- Determinante
- Spur
- Matrixexponential
- Eigenwertproblem

Determinante

Die Determinante $\det(\cdot)$ ist eine Abbildung von einer quadratischen Matrix auf eine reelle (oder komplexe) Zahl.

Determinante

Die Determinante $\det(\cdot)$ ist eine Abbildung von einer quadratischen Matrix auf eine reelle (oder komplexe) Zahl.

Determinante einer 2×2 Matrix

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Die Inverse einer 2×2 Matrix A ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Elemente der linearen Algebra

Seien $A,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ein Matrixelement in der i-ten Spalte und j-ten Zeile. Es gilt:

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,

Seien $A,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ein Matrixelement in der i-ten Spalte und j-ten Zeile. Es gilt:

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
2. $\det(\mathbb{1}_{n\times n}) = 1$,

Elemente der linearen Algebra

Seien $A,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ein Matrixelement in der i-ten Spalte und j-ten Zeile. Es gilt:

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
2. $\det(\mathbb{1}_{n\times n}) = 1$,
3. $\det(A^T) = \det(A)$,

Elemente der linearen Algebra

Seien $A,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ein Matrixelement in der i-ten Spalte und j-ten Zeile. Es gilt:

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
2. $\det(\mathbb{1}_{n\times n}) = 1$,
3. $\det(A^T) = \det(A)$,
4. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$,

Elemente der linearen Algebra

Seien $A,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ein Matrixelement in der i-ten Spalte und j-ten Zeile. Es gilt:

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
2. $\det(\mathbb{1}_{n\times n}) = 1$,
3. $\det(A^T) = \det(A)$,
4. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$,
5. $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ für Dreiecksmatrix A,

Elemente der linearen Algebra

Seien $A,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ein Matrixelement in der i-ten Spalte und j-ten Zeile. Es gilt:

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
2. $\det(\mathbb{1}_{n\times n}) = 1$,
3. $\det(A^T) = \det(A)$,
4. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$,
5. $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ für Dreiecksmatrix A,
6. Ist B durch das Vertauschen zweier Spalten oder Zeilen aus A hervorgegangen, so ist $\det(A) = -\det(B)$,

Elemente der linearen Algebra

Seien $A,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ein Matrixelement in der i-ten Spalte und j-ten Zeile. Es gilt:

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
2. $\det(\mathbb{1}_{n\times n}) = 1$,
3. $\det(A^T) = \det(A)$,
4. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$,
5. $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ für Dreiecksmatrix A,
6. Ist B durch das Vertauschen zweier Spalten oder Zeilen aus A hervorgegangen, so ist $\det(A) = -\det(B)$,
7. Ist B durch das Addieren eines Vielfachen einer Spalte (Zeile) zu einer anderen Spalte (Zeile) hervorgegangen, so ist $\det(A) = \det(B)$,

Elemente der linearen Algebra

Seien $A,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ein Matrixelement in der i-ten Spalte und j-ten Zeile. Es gilt:

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
2. $\det(\mathbb{1}_{n\times n}) = 1$,
3. $\det(A^T) = \det(A)$,
4. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$,
5. $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ für Dreiecksmatrix A,
6. Ist B durch das Vertauschen zweier Spalten oder Zeilen aus A hervorgegangen, so ist $\det(A) = -\det(B)$,
7. Ist B durch das Addieren eines Vielfachen einer Spalte (Zeile) zu einer anderen Spalte (Zeile) hervorgegangen, so ist $\det(A) = \det(B)$,
8. Ist B durch das Multiplizieren einer Spalte (Zeile) mit $\lambda \in \mathbb{R}$ aus A hervorgegangen, so ist $\det(B) = \lambda\det(A)$, insbesondere gilt auch $\lambda^n\det(A) = \det(\lambda A)$.

1. Überlegt zuerst allein und dann diskutiert gemeinsam für 2 min.
2. Teilt die Lösung mit dem Kurs.

Quiz

Quiz 1: Was ist die Determinante der folgenden Matrix?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & a \\ 3 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Quiz

Quiz 1: Was ist die Determinante der folgenden Matrix?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & a \\ 3 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \det(A) = 69.$$

Mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz.

Spur

Für eine quadratische $n \times n$ Matrix A ist die Spur definiert als Summe über die Diagonalelemente, d.h.

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Elemente der linearen Algebra

Seien $A, \ B, \ C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Es gilt:

1. $\mathrm{Spur}(A+B) = \mathrm{Spur}(A) + \mathrm{Spur}(B)$,

Elemente der linearen Algebra

Seien $A, \ B, \ C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Es gilt:

1. $\mathrm{Spur}(A + B) = \mathrm{Spur}(A) + \mathrm{Spur}(B)$,
2. $\mathrm{Spur}(A \cdot B) = \mathrm{Spur}(B \cdot A)$,

Seien $A,\ B,\ C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Es gilt:

1. $\mathrm{Spur}(A+B) = \mathrm{Spur}(A) + \mathrm{Spur}(B)$,
2. $\mathrm{Spur}(A\cdot B) = \mathrm{Spur}(B\cdot A)$,
3. $\mathrm{Spur}(A\cdot B\cdot C) = \mathrm{Spur}(C\cdot A\cdot B) = \mathrm{Spur}(B\cdot C\cdot A)$.

Matrixexponential

Das Matrixexponential ist für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (oder $\mathbb{C}^{n\times n}$) definiert als

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ (oder } \mathbb{C}^{n\times n}\text{)}.$$

Das Matrixexponential erfüllt folgende Eigenschaften:

1. $\exp(\mathbb{0}_{n\times n}) = \mathbb{1}_{n\times n}$,

Das Matrixexponential erfüllt folgende Eigenschaften:

1. $\exp(\mathbb{0}_{n\times n}) = \mathbb{1}_{n\times n}$,
2. $\exp(A)^{-1} = \exp(A^{-1})$,

Elemente der linearen Algebra

Das Matrixexponential erfüllt folgende Eigenschaften:

1. $\exp(\mathbb{0}_{n\times n}) = \mathbb{1}_{n\times n}$,
2. $\exp(A)^{-1} = \exp(A^{-1})$,
3. Für zwei Skalare $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) gilt
   $\exp(\lambda A)\exp(\mu A) = \exp((\lambda + \mu)A)$,

Elemente der linearen Algebra

Das Matrixexponential erfüllt folgende Eigenschaften:

1. $\exp(\mathbb{0}_{n\times n}) = \mathbb{1}_{n\times n}$,
2. $\exp(A)^{-1} = \exp(A^{-1})$,
3. Für zwei Skalare $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) gilt $\exp(\lambda A)\exp(\mu A) = \exp((\lambda+\mu)A)$,
4. Für zwei kommutierende quadratische Matrizen A und B, d.h. $AB = BA$, gilt $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Zusammenhang zwischen Determinante, Spur und Matrixexponential:

$$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Spur}(A)).$$

Eigenwertproblem

Erfüllen eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (or $\mathbb{C}^{n\times n}$) und ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$

$$Ax = \lambda x,$$

dann ist λ der zum Eigenvektor x gehörige Eigenwert. Das Eigenwertproblem hat eine nicht-triviale Lösung für

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}_{n\times n}) = 0.$$

Beispiel: Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 4$ und die Eigenvektoren sind $x_1 = (1, -4)^T$ und $x_2 = (1, 1)^T$.

Kapitel II
Differentialgleichungen
(Sektionen 2 und 5 im Skript)

Differentialgleichungen

Lernziele: Kennen und Anwenden von Lösungsmethoden für Differentialgleichungssysteme und partielle Differentialgleichungen.

Methoden: Diagonalisieren (entkoppeln), Matrixexponential, Variation der Konstanten, ...

Differentialgleichungen

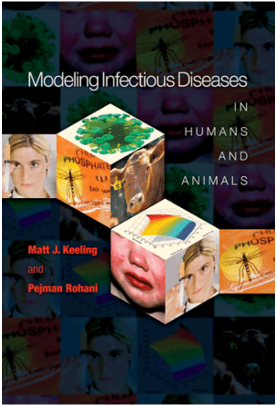
Lernziele: Kennen und Anwenden von Lösungsmethoden für Differentialgleichungssysteme und partielle Differentialgleichungen.

Methoden: Diagonalisieren (entkoppeln), Matrixexponential, Variation der Konstanten, ...

Differentialgleichungen

Lernziele: Kennen und Anwenden von Lösungsmethoden für Differentialgleichungssysteme und partielle Differentialgleichungen.

Methoden: Diagonalisieren (entkoppeln), Matrixexponential, Variation der Konstanten, ...



System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

Gegeben sei ein System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}(t) + \cdots + a_{1n}(t) + b_1(t), \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}(t) + \cdots + a_{nn}(t) + b_n(t). \end{aligned}$$

System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

Gegeben sei ein System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t), \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t). \end{aligned}$$

Das obere System heisst homogen, wenn alle $b_k = 0$. Sonst nennt man es inhomogen. In Matrixschreibweise findet man

$$x'(t) = Ax(t) + b(t),$$

wobei $x,\ b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Insbesondere sind A und b von der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ und } b(t) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Homogenes System mit Diagonalmatrix

Sei $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix. Dann ist

$$x_k'(t) = \lambda_k x_k(t), \; k \in \{1, \dots, n\}.$$

Man nennt dieses System ungekoppelt, da $x_k'(t)$ nur von $x_k(t)$ und nicht mit anderen $x_{\tilde{k}}(t)$ wobei $\tilde{k} \neq k$ "gekoppelt" ist.

Homogenes System mit Diagonalmatrix

Sei $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix. Dann ist

$$x_k'(t) = \lambda_k x_k(t),\ k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Man nennt dieses System ungekoppelt, da $x_k'(t)$ nur von $x_k(t)$ und nicht mit anderen $x_{\tilde{k}}(t)$ wobei $\tilde{k} \neq k$ “gekoppelt” ist. Die Lösung dieses Systems ist einfach

$$x(t) = \left(c_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, c_n e^{\lambda_n t}\right)^T \text{ mit Konstanten } c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Homogenes System mit Diagonalmatrix

Sei $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix. Dann ist

$$x_k'(t) = \lambda_k x_k(t), \; k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Man nennt dieses System ungekoppelt, da $x_k'(t)$ nur von $x_k(t)$ und nicht mit anderen $x_{\tilde{k}}(t)$ wobei $\tilde{k} \neq k$ "gekoppelt" ist. Die Lösung dieses Systems ist einfach

$$x(t) = \left(c_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, c_n e^{\lambda_n t}\right)^T \text{ mit Konstanten } c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Eine Basis des Lösungsraumes (Fundamentalsystem) ist gegeben durch

$$y_1 = \left(e^{\lambda_1 t}, \ldots, 0\right)^T, \ldots, y_n = \left(0, \ldots, e^{\lambda_n t}\right)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Die obere Lösung lässt sich schreiben als $x(t) = c_1 y_1(t) + \cdots + c_n y_n(t)$.

Homogenes System mit diagonalisierbarer Matrix

Sei zum Beispiel

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t), \\ x_2'(t) &= -3x_1(t) + 4x_2(t). \end{aligned}$$

Homogenes System mit diagonalisierbarer Matrix

Sei zum Beispiel

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t), \\ x_2'(t) &= -3x_1(t) + 4x_2(t). \end{aligned}$$

Schritt 1: Umschreiben in Matrixform

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Ax(t)$$

Homogenes System mit diagonalisierbarer Matrix

Sei zum Beispiel

$$x_1'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t),$$
$$x_2'(t) = -3x_1(t) + 4x_2(t).$$

Schritt 1: Umschreiben in Matrixform

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Ax(t)$$

Schritt 2: Eigenwerte und Diagonalform berechnen
Durch $\det(A - \lambda \mathbb{1}_{2\times 2}) = 0$ findet man $(1+\lambda)(\lambda - 4) + 6 = 0$. Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Die Diagonalform der Matrix A ist damit $D = \mathrm{diag}(1, 2)$.

Schritt 3: Eigenvektoren und Transformationsmatrix berechnen

Die Eigenvektoren sind $v_1 = (1,1)^T$ und $v_2 = (2,3)^T$ (bzw. lineare Vielfache davon). Damit ist die Transformationsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Schritt 4: Lösung des homogenen Systems berechnen

Durch die Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(1,2)$ ist die Lösung für $\tilde{x}(t)$ gegegen durch $\tilde{x}(t) = \left(\tilde{c}_1 e^t, \tilde{c}_2 e^{2t}\right)^T$ und wir erhalten weiter

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = P\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 e^t \\ \tilde{c}_2 e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 e^t + 2\tilde{c}_2 e^{2t} \\ \tilde{c}_1 e^t + 3\tilde{c}_2 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Schritt 4: Lösung des homogenen Systems berechnen

Durch die Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(1,2)$ ist die Lösung für $\tilde{x}(t)$ gegegen durch $\tilde{x}(t) = \left(\tilde{c}_1 e^t, \tilde{c}_2 e^{2t}\right)^T$ und wir erhalten weiter

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = P\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 e^t \\ \tilde{c}_2 e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 e^t + 2\tilde{c}_2 e^{2t} \\ \tilde{c}_1 e^t + 3\tilde{c}_2 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere kann man die letzte Gleichung auch schreiben als

$$x(t) = \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 e^t + 2\tilde{c}_2 e^{2t} \\ \tilde{c}_1 e^t + 3\tilde{c}_2 e^{2t} \end{pmatrix} = \tilde{c}_1 v_1 e^t + \tilde{c}_2 v_2 e^{2t}.$$

Eine Basis des Lösungraums (Fundamentalsystem) ist in diesem Beispiel

$$y_1 = v_1 e^t \text{ und } y_2 = v_2 e^{2t}.$$

Allgemeines homogenes System und Matrixexponential

Für $x'(t) = Ax(t)$ ist die Lösung bestimmt durch

$$x(t) = e^{At}x_0 \text{ für alle } t.$$

Allgemeines homogenes System und Matrixexponential

Für $x'(t) = Ax(t)$ ist die Lösung bestimmt durch

$$x(t) = e^{At}x_0 \text{ für alle } t.$$

Beispiele sind

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \implies x(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} x_0,$$

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \implies x(t) = \begin{pmatrix} e^{at}\cos(bt) & -e^{at}\sin(bt) \\ e^{at}\sin(bt) & e^{at}\cos(bt) \end{pmatrix} x_0.$$

Allgemeines homogenes System und Matrixexponential

Für $x'(t) = Ax(t)$ ist die Lösung bestimmt durch

$$x(t) = e^{At}x_0 \text{ für alle } t.$$

Beispiele sind

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \implies x(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} x_0,$$

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \implies x(t) = \begin{pmatrix} e^{at}\cos(bt) & -e^{at}\sin(bt) \\ e^{at}\sin(bt) & e^{at}\cos(bt) \end{pmatrix} x_0.$$

Für diagonalisierbare Matrizen gilt

$$e^A = e^{PAP^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(PDP^{-1}\right)^k}{k!} = P \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{D^k}{k!}\right) P^{-1} = Pe^D P^{-1}.$$

Inhomogenes System

Wir betrachten nun ein inhomogenes System von der Form

$$x'(t) = Ax(t) + b(t),\ x(0) = x_0.$$

Die Lösung dieses Anfangswertproblems ist gegeben durch

$$x(t) = \exp(tA)x(0) + \int_0^t \exp((t-u)A)b(u)\mathrm{d}u.$$

Quiz

1. Überlegt zuerst allein und dann diskutiert gemeinsam für 2 min.
2. Teilt die Lösung mit dem Kurs.

Quiz

Finde A, $b(t)$ und $x(0)$ für

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) + t,\ x_1(0) = 1, \\ x_2'(t) &= -x_1(t) - \sin(t),\ x_2(0) = 0, \end{aligned}$$

so dass

$$x'(t) = Ax(t) + b(t),\ x(0) = x_0.$$

Quiz

Finde A, $b(t)$ und $x(0)$ für

$$x_1'(t) = x_2(t) + t,\ x_1(0) = 1,$$
$$x_2'(t) = -x_1(t) - \sin(t),\ x_2(0) = 0,$$

so dass

$$x'(t) = Ax(t) + b(t),\ x(0) = x_0.$$

Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$b(t) = \begin{pmatrix} t \\ -\sin(t) \end{pmatrix},$$
$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Inhomogenes System

Ziel: Berechnen von $x(t) = \exp(tA)x(0) + \int_0^t \exp((t-u)A)b(u)\mathrm{d}u$.

Schritt 1: Berechnen der Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Eigenwerte der Matrix A findet man durch $\det(A - \lambda \mathbb{1}_{2\times 2}) = 0$. Es ergibt sich $\lambda_{1,2} = \pm i$. Die Eigenvektoren sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

oder lineare Vielfache davon.

Inhomogenes System

Ziel: Berechnen von $x(t) = \exp(tA)x(0) + \int_0^t \exp((t-u)A)b(u)\mathrm{d}u$.

Schritt 2: Berechnen des Matrixexponentials

$$\begin{aligned}
\exp(tA) &= \exp\left(tPDP^{-1}\right) = P\exp(tD)P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Inhomogenes System

Ziel: Berechnen von $x(t) = \exp(tA)x(0) + \int_0^t \exp((t-u)A)b(u)\mathrm{d}u$.

Schritt 3: Berechnen der Lösung des Anfangwertproblems

$$\begin{aligned}
x(t) &= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+ \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-u) & \sin(t-u) \\ -\sin(t-u) & \cos(t-u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ -\sin(u) \end{pmatrix} \mathrm{d}u \\
&= \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t u\cos(t-u)\mathrm{d}u - \int_0^t \sin(u)\sin(t-u)\mathrm{d}u \\ -\int_0^t u\sin(t-u)\mathrm{d}u - \int_0^t \sin(u)\cos(t-u)\mathrm{d}u \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}t\cos(t) \\ -t - \frac{1}{2}t\sin(t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

Gegeben sei eine lineare homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0.$$

Mit dem Ansatz $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ erhält man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms durch

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda a_1 + a_0 = 0.$$

Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

Gegeben sei eine lineare homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0.$$

Mit dem Ansatz $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ erhält man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms durch

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda a_1 + a_0 = 0.$$

Als Beispiel betrachten wir

$$x^{(3)} - 2x^{(2)} - x' + 2x = 0.$$

Damit findet man durch $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ die Nullstellen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$.

Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

Gegeben sei eine lineare homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0.$$

Mit dem Ansatz $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ erhält man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms durch

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda a_1 + a_0 = 0.$$

Als Beispiel betrachten wir

$$x^{(3)} - 2x^{(2)} - x' + 2x = 0.$$

Damit findet man durch $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ die Nullstellen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$.
Also ist das Fundamentalsystem $x_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^t$, $x_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{-t}$, $x_3(t) = e^{\lambda_3 t} = e^{2t}$.

Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

Im Fall von

$$x^{(3)} - 2x^{(2)} - x' + 2x = 10\cos(t)$$

bestimmt man zusätzlich noch die partikuläre Lösung durch den Ansatz $x_{\mathrm{par}}(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$ und addiert diese zur homogenen Lösung.

Man findet $x_{\mathrm{par}}(t) = 2\cos(t) - \sin(t)$.

Partielle Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung, welche von mehreren Variablen wie Ort und Zeit abhängt und deren Ableitungen enthält, nennt man partielle Differentialgleichung.

Partielle Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung, welche von mehreren Variablen wie Ort und Zeit abhängt und deren Ableitungen enthält, nennt man partielle Differentialgleichung.

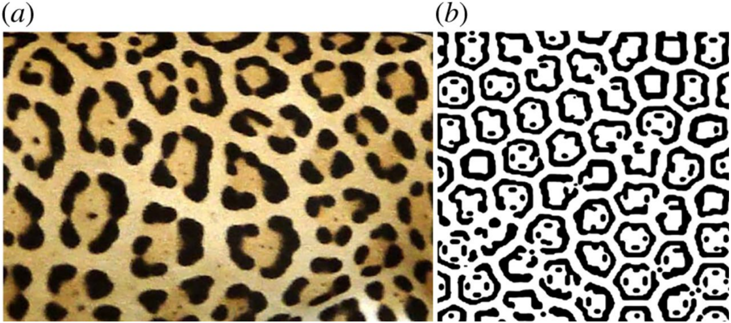


Figure 1: From Phil. Trans. R. Soc. B 370.1666 (2015): (a) The rosette spots of a jaguar, and (b) an analogous pattern produced by two coupled activatorinhibitor processes. (b) Courtesy of Philip Maini, University of Oxford.

Eine Differentialgleichung, welche von mehreren Variablen wie Ort und Zeit abhängt und deren Ableitungen enthält, nennt man partielle Differentialgleichung.

Figure 2: From Phil. Trans. R. Soc. B 370.1666 (2015): Patterns on seashells and their analogues in theoretical activatorinhibitor systems. Courtesy of Hans Meinhardt, MPI for Developmental Biology, Tübingen.

Partielle Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung, welche von mehreren Variablen wie Ort und Zeit abhängt und deren Ableitungen enthält, nennt man partielle Differentialgleichung.

Wir betrachten als Beispiel die Laplacegleichung zur Berechnung einer stationären Temperaturverteilung $u(x, y)$ auf einem Quadrat Q mit Ecken $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$ und (π, π). Die Differentialgleichung sowie Randbedingungen sind

$$\begin{aligned}
\Delta u(x, y) &= 0, \\
u(0, y) &= 0 \text{ wobei } 0 < y < \pi, \\
u(x, 0) &= 0 \text{ wobei } 0 < x < \pi, \\
u(x, \pi) &= 0 \text{ wobei } 0 < x < \pi, \\
u(\pi, y) &= \sin(4y) \text{ wobei } 0 < y < \pi.
\end{aligned}$$

Schritt 1: Separationsansatz

Wir machen den Ansatz $u(x, y) = X(x)Y(y)$ und finden $X''Y + Y''X = 0$ und damit

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\omega^2.$$

Schritt 1: Separationsansatz

Wir machen den Ansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ und finden $X''Y + Y''X = 0$ und damit

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\omega^2.$$

Das liefert $X'' - \omega^2 X = 0$ und $Y'' + \omega^2 Y = 0$ mit den Lösungen $Y(y) = A\cos(\omega y) + B\sin(\omega y)$ und $X(x) = Ce^{\omega x} + De^{-\omega x}$.

Die Randbedingungen $Y(0) = Y(\pi) = 0$ ergeben $A = 0$ und $\omega = k \in \mathbb{N}$ also ist $Y(y) = B\sin(ky)$. Und aus $X(0) = 0$ folgt $C = -D$ und damit $X(x) = C\left(e^{kx} - e^{-kx}\right)$.

Schritt 2: Superposition

Die Superposition von Lösungen ergibt

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sin(ky)\left(e^{kx} - e^{-kx}\right).$$

Schritt 2: Superposition

Die Superposition von Lösungen ergibt

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sin(ky) \left(e^{kx} - e^{-kx}\right).$$

Nun gibt die letzte Randbedingung $u(\pi, y) = \sin(4y)$ und Koeffizientenvergleich gibt $C_4 = \frac{1}{e^{4\pi} - e^{-4\pi}}$ und $C_k = 0$ sonst. Damit folgt für die Lösung

$$u(x,y) = \sin(4y) \frac{e^{4x} - e^{-4x}}{e^{4\pi} - e^{-4\pi}} = \sin(4y) \frac{\sinh(4x)}{\sinh(4\pi)}.$$