Zusammenfassung Mathematik III

January 9, 2018

Die folgende Zusammenfassung ist als Unterstützung zur Prüfungsvorbereitung für die Vorlesung "Mathematik III" gedacht. Das selbständige Anfertigen einer eigenen Zusammenfassung ist sehr empfohlen, um weitere Inhalte individuell zu ergänzen und alles nochmals zu reflektieren.

Summation

Gauss'sche Summenformel

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$$

Geometrische Reihe ($|r| < 1$)

$$\sum_{n=1}^{N} r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Für $N \to \infty$ gilt $r^{N+1} \to 0$ da $|r| < 1$.

Taylorreihen

Mit Taylorreihen stellt man Funktionen durch Potenzreihen (Polynome) dar. Die nachfolgenden Taylorreihen wurden um den Ursprung entwickelt.

Exponentialfunktion

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Sinus

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Kosinus

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Identitäten und Definitionen

- Partielle Integration: $\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$,
- Gradient: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\hat{e}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\hat{e}_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$,
- Divergenz: $\mathrm{div} f = \nabla \cdot f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}$,
- Laplace-Operator: $\Delta f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$,
- Gerade Funktion: $f(t) = f(-t)$,
- Ungerade Funktion: $f(t) = -f(-t)$,
- $\sin(t) = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$,
- $\cos(t) = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$,
- $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$,
- $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$,
- $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$.

Lineare Algebra

Vektorraum

Ein Vektorraum ist eine Menge von Elementen für welche gewisse Verknüpfungen definiert sind. Ein Beispiel ist der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die Elemente in $\mathbb{R}^n$ nennt man Vektoren und diese sind von der Form $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Für die formale Definition des Vektorraumes betrachtet man Eigenschaften von Verknüpfungen von Vektoren und von Vektoren mit Skalaren.

Im Beispiel von Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ sind die hier relevanten Verknüpfungen:

- Addition: Für $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ gilt $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$
- Skalare Multiplikation: Für $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n$

Für die Definition eines Vektorraums gelten folgende Axiome ($x,\ y,\ z \in \mathbb{R}^n$, $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$):

- Für die Addition: Existenz eines neutralen Elements ($x+0 = x$), Existenz eines inversen Elements ($x + (-x) = 0$), Assoziativität ($x + (y + z) = (x + y) + z$), Kommutativität ($x + y = y + x$)
- Für die skalare Multiplikation: Existenz eines neutralen Elements ($1x = x$), Distributivität ($(\lambda+\mu)x = \lambda x+\mu x$, $\lambda(x+y) = \lambda x+\lambda y$), Kompatibilität von Multiplikationen ($\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$)

Für zwei Elemente $x,\ y$ des euklidischen Vektorraums ist weiterhin auch ein inneres Produkt definiert:

$$\langle x, y\rangle = x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \in \mathbb{R}.$$

Das Skalarprodukt erfüllt auch $x \cdot y = \|x\|\|y\| \cos(\theta)$, wobei $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$ die Norm des Vektors x ist und θ ist der Winkel zwischen den Vektoren x und y.

Die Standardbasis des euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T,\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0)^T, \ldots,\ e_n = (0, \ldots, 1)^T.$$

Die Basis ist eine linear-unabhängige Teilmenge eines Vektorraums. Die Anzahl der Basiselemente ist gleich der Dimension $\dim(\cdot)$ des Vektorraums. Für den euklidischen Vektorraum gilt $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Ein Untervektorraum ist ein nicht-leerer Teilraum eines Vektorraumes, der abgeschlossen ist bezüglich Vektoraddition und Skalarmultiplikation.

Determinante

Die Determinante $\det(\cdot)$ ist eine Abbildung von einer quadratischen Matrix auf eine reelle (oder komplexe) Zahl. Seien $A,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ein Matrixelement in der i-ten Spalte und j-ten Zeile. Es gilt:

1. Die Determinante ist eine multiplikative Abbildung, d.h. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
2. Für die Identitätsmatrix findet man $\det(\mathbb{1}_{n\times n}) = 1$,
3. Die Determinante der Transponierten A^T erfüllt $\det(A^T) = \det(A)$,
4. Die Determinante der Inversen A^{-1} ist $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$,
5. Ist A eine Dreiecksmatrix, d.h. $a_{ij} = 0$ für alle $i < j$ $(i > j)$, dann ist $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$,
6. Ist B durch das Vertauschen zweier Spalten oder Zeilen aus A hervorgegangen, so ist $\det(A) = -\det(B)$,
7. Ist B durch das Addieren eines Vielfachen einer Spalte (Zeile) zu einer anderen Spalte (Zeile) hervorgegangen, so ist $\det(A) = \det(B)$,
8. Ist B durch das Multiplizieren einer Spalte (Zeile) mit $\lambda \in \mathbb{R}$ aus A hervorgegangen, so ist $\det(B) = \lambda\det(A)$, insbesondere gilt auch $\lambda^n \det(A) = \det(\lambda A)$.

Determinante einer 2×2 Matrix

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Nebenbemerkung: Die Inverse einer 2×2 Matrix A ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Determinante einer 3×3 Matrix

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \\ \left[\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} & \end{array}$$

Der Laplace'sche Entwicklungssatz ist eine weitere Methode die Determinante zu berechnen. Für eine feste Spalte $1 \leq j \leq n$ ist

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

und für eine feste Zeile $1 \leq i \leq n$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}).$$

Eine Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn gilt $\det(A) \neq 0$.

Spur

Für eine quadratische $n \times n$ Matrix A ist die Spur definiert als Summe über die Diagonalelemente, d.h.

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Seien $A,\ B,\ C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Es gilt:

1. Die Spur ist eine lineare Abbildung, d.h. $\mathrm{Spur}(A + B) = \mathrm{Spur}(A) + \mathrm{Spur}(B)$,
2. Unter der Spur kann man die Matrizen A und B vertauschen, d.h. $\mathrm{Spur}(A \cdot B) = \mathrm{Spur}(B \cdot A)$,
3. Die Spur ist unter zyklischen Vertauschungen invariant, d.h. $\mathrm{Spur}(A \cdot B \cdot C) = \mathrm{Spur}(C \cdot A \cdot B) = \mathrm{Spur}(B \cdot C \cdot A)$.

Matrixexponential

Das Matrixexponential ist für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (oder $\mathbb{C}^{n \times n}$) definiert als

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ (oder } \mathbb{C}^{n \times n}).$$

Das Matrixexponential erfüllt folgende Eigenschaften:

1. Für die Nullmatrix $\mathbb{0}_{n \times n}$ ist $\exp(\mathbb{0}_{n \times n}) = \mathbb{1}_{n \times n}$,
2. Die Inverse des Matrixexponentials ist $\exp(A)^{-1} = \exp(A^{-1})$,
3. Für zwei Skalare $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) gilt $\exp(\lambda A) \exp(\mu A) = \exp((\lambda + \mu) A)$,
4. Für zwei kommutierende quadratische Matrizen A und B, d.h. $AB = BA$, gilt $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$.

Zusammenhang zwischen Determinante, Spur und Matrixexponential:

$$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Spur}(A)).$$

Eigenwertproblem

Erfüllen eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (or $\mathbb{C}^{n\times n}$) und ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$

$$Ax = \lambda x,$$

dann ist λ der zum Eigenvektor x gehörige Eigenwert. Das Eigenwertproblem hat eine nicht-triviale Lösung für

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}_{n\times n}) = 0.$$

Als Beispiel betrachten wir die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ und man erhält mit $\det(A - \lambda \mathbb{1}_{2\times 2}) = 0$ die folgende quadratische Gleichung $(\lambda - 3)\lambda - 4 = 0$. Das führt auf $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 4$. Wir berechnen nun beispielhaft den ersten Eigenvektor mit

$$(A - \lambda_1 \mathbb{1}_{2\times 2})x_1 = 0 \iff \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist $x_1 = (1, -4)^T$ oder ein entsprechendes (lineares) Vielfaches. Für den zweiten Eigenvektor findet man entsprechend $x_2 = (1, 1)^T$. Aus den Eigenvektoren erhält man die Transformationsmatrizen

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt, dass $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(-1, 4)$ ist. Allgemein gilt, dass $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ist. Weiterhin findet man, die nützliche Eigenschaft

$$A^k = PDP^{-1} \ldots PDP^{-1} = PD^kP^{-1}.$$

Differentialgleichungen

System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

Gegeben sei ein System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t), \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t). \end{aligned}$$

Wir konzentrieren uns auf den Fall, wo alle a_{kl} und b_k konstant sind. Das obere System heisst homogen, wenn alle $b_k = 0$. Sonst nennt man es inhomogen. In Matrixschreibweise findet man

$$x'(t) = Ax(t) + b(t),$$

wobei $x,\ b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Insbesondere sind A und b von der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ und } b(t) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Homogenes System mit Diagonalmatrix

Sei $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix mit den Werten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ auf der Diagonalen. Das homogene System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung ist dann von der Form

$$x_k'(t) = \lambda_k x_k(t),\ k \in \{1, \dots, n\}.$$

Man nennt dieses System ungekoppelt, da $x_k'(t)$ nur von $x_k(t)$ und nicht mit anderen $x_{\tilde{k}}(t)$ wobei $\tilde{k} \neq k$ "gekoppelt" ist. Die Lösung dieses Systems ist einfach

$$x(t) = \left(c_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, c_n e^{\lambda_n t}\right)^T \text{ mit Konstanten } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Eine Basis des Lösungsraumes (Fundamentalsystem) ist gegeben durch

$$y_1 = \left(e^{\lambda_1 t}, \dots, 0\right)^T, \dots, y_n = \left(0, \dots, e^{\lambda_n t}\right)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Die obere Lösung lässt sich schreiben als $x(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t)$.

Homogenes System mit diagonalisierbarer Matrix

Sei $A = PDP^{-1}$ eine diagonalisierbare Matrix mit den Transformationsmatrizen $P,\ P^{-1}$ und der Diagonalmatrix $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Wir finden nun für das homogene System linearer Differentialgleichungen

$$x'(t) = Ax \iff P^{-1}x'(t) = DP^{-1}x(t)$$

Wir betrachten jetzt $\tilde{x}(t) = P^{-1}x(t)$ und finden

$$\tilde{x}'(t) = D\tilde{x}(t).$$

Damit lässt sich die Lösung wieder auf ein System mit Diagonalmatrix zurückführen. Man findet wieder

$$\tilde{x}(t) = \left(c_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, c_n e^{\lambda_n t}\right)^T \text{ mit Konstanten } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Nun muss man noch zurücktransfomieren und findet schliesslich die Lösung $x(t) = P\tilde{x}(t)$.

Sei zum Beispiel

$$x_1'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t),$$
$$x_2'(t) = -3x_1(t) + 4x_2(t).$$

Schritt 1: Umschreiben in Matrixform

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Ax(t)$$

Schritt 2: Eigenwerte und Diagonalform berechnen
Das charakteristische Polynom ist gegeben durch $\det(A - \lambda \mathbb{1}_{2\times 2}) = 0$. Man findet $(1+\lambda)(\lambda-4)+6 = 0$. Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Die Diagonalform der Matrix A ist damit $D = \operatorname{diag}(1,2)$.

Schritt 3: Eigenvektoren und Transformationsmatrix berechnen
Die Eigenvektorberechnung ist genauer im Abschnitt *Eigenwertproblem* erklärt. Für dieses Beispiel findet man $v_1 = (1,1)^T$ und $v_2 = (2,3)^T$ (bzw. lineare Vielfache davon). Damit ist die Transformationsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Schritt 4: Lösung des homogenen Systems berechnen
Durch die Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(1,2)$ ist die Lösung für $\tilde{x}(t)$ gegeben durch $\tilde{x}(t) = \left(\tilde{c}_1 e^t, \tilde{c}_2 e^{2t}\right)^T$ und wir erhalten weiter

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = P\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 e^t \\ \tilde{c}_2 e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 e^t + 2\tilde{c}_2 e^{2t} \\ \tilde{c}_1 e^t + 3\tilde{c}_2 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere kann man die letzte Gleichung auch schreiben als

$$x(t) = \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 e^t + 2\tilde{c}_2 e^{2t} \\ \tilde{c}_1 e^t + 3\tilde{c}_2 e^{2t} \end{pmatrix} = \tilde{c}_1 v_1 e^t + \tilde{c}_2 v_2 e^{2t}.$$

Eine Basis des Lösungraums (Fundamentalsystem) ist in diesem Beispiel

$$y_1 = v_1 e^t \text{ und } y_2 = v_2 e^{2t}.$$

Allgemeines homogenes System und Matrixexponential

Ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nicht-diagonalisierbar, d.h. die Eigenvektoren formen keine Basis des $\mathbb{R}^n$, ist eine andere Möglichkeit die Lösung des homogenen Systems linearer Differentialgleichungen mit dem Matrixexponential zu finden. Denn für $x'(t) = Ax(t)$ ist die Lösung bestimmt durch

$$x(t) = e^{At} x_0 \text{ für alle } t.$$

Wir betrachten zwei Beispiele

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \implies x(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} x_0,$$

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \implies x(t) = \begin{pmatrix} e^{at}\cos(bt) & -e^{at}\sin(bt) \\ e^{at}\sin(bt) & e^{at}\cos(bt) \end{pmatrix} x_0.$$

Ist die Matrix A diagonalisierbar mit $A = PDP^{-1}$, kann eine Lösung mit dem Matrixexponential auch vorteilhaft sein da

$$e^A = e^{PAP^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(PDP^{-1}\right)^k}{k!} = P \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{D^k}{k!}\right) P^{-1} = Pe^D P^{-1}.$$

Eine weitere Möglichkeit ist die Jordan'sche Normalform $J = P^{-1}AP$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zur Berechnung des Matrixexponentials zu verwenden. Dabei gilt

$$P^{-1}AP = J = J_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus J_{\lambda_r} = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda_r} \end{pmatrix},$$

wobei $J_{\lambda_1}, \ldots, J_{\lambda_r}$ die einzelnen Jordanblöcke sind. Diese sind von der Form

$$J_{\lambda_k} = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Ähnlich zu diagonalisierbaren Matrizen findet man auch hier $e^A = Pe^J P^{-1}$ mit $e^J = e^{J_{\lambda_1}} \oplus \cdots \oplus e^{J_{\lambda_r}}$. Jeder Jordanblock ist von der Form $J_{\lambda_k} = \lambda_k \mathbb{1} + N$, wobei N eine nilpotente Matrix vom Nilpotenzgrad n ist, d.h. $N^n = 0$. Damit folgt $e^{J_{\lambda_k}} = e^{\lambda_k \mathbb{1}} e^N$ mit

$$e^N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}, \text{ da } N^n = 0.$$

Wir betrachten noch ein Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \implies A = \lambda \mathbb{1}_{2\times 2} + N,$$

wobei $N^k = 0$ für $k \geq 2$. Damit folgt

$$e^{tA} = e^{t\lambda \mathbb{1}_{2\times 2}} e^{tN} = e^{\lambda t}(\mathbb{1}_{2\times 2} + tN) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Inhomogenes System

Wir betrachten nun ein inhomogenes System von der Form

$$x'(t) = Ax(t) + b(t),\ x(0) = x_0.$$

Die Lösung dieses Anfangswertproblems ist gegeben durch

$$x(t) = \exp(tA)x(0) + \int_0^t \exp((t-u)A)b(u)\mathrm{d}u.$$

Seien zum Beispiel

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) + t,\ x_1(0) = 1 \\ x_2'(t) &= -x_1(t) - \sin(t),\ x_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Dann ist in diesem Beispiel

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ b(t) &= \begin{pmatrix} t \\ -\sin(t) \end{pmatrix}, \\ x(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Schritt 1: Berechnen der Eigenwerte und Eigenvektoren
Die Eigenwerte der Matrix A findet man durch $\det(A - \lambda \mathbb{1}_{2\times 2}) = 0$. Es ergibt sich $\lambda_{1,2} = \pm i$. Die Eigenvektoren sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

oder lineare Vielfache davon.

Schritt 2: Berechnen des Matrixexponentials

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \exp\left(tPDP^{-1}\right) = P\exp(tD)P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Schritt 3: Berechnen der Lösung des Anfangwertproblems

$$\begin{aligned}
x(t) &= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-u) & \sin(t-u) \\ -\sin(t-u) & \cos(t-u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ -\sin(u) \end{pmatrix} \mathrm{d}u \\
&= \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t u\cos(t-u)\mathrm{d}u - \int_0^t \sin(u)\sin(t-u)\mathrm{d}u \\ -\int_0^t u\sin(t-u)\mathrm{d}u - \int_0^t \sin(u)\cos(t-u)\mathrm{d}u \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}t\cos(t) \\ -t - \frac{1}{2}t\sin(t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

Gegeben sei eine lineare homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0.$$

Mit dem Ansatz $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ erhält man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms durch

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda a_1 + a_0 = 0.$$

Als Beispiel betrachten wir

$$x^{(3)} - 2x^{(2)} - x' + 2x = 0.$$

Damit findet man durch $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ die Nullstellen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$. Also ist das Fundamentalsystem $x_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^t$, $x_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{-t}$, $x_3(t) = e^{\lambda_3 t} = e^{2t}$.

Für eine lineare inhomogene Differentialgleichung n-ter Ordnung berechnet man typischerweise erst die homogene Lösung und dann addiert man die partikuläre Lösung dazu.

Partielle Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung, welche von mehreren Variablen wie Ort und Zeit abhängt und deren Ableitungen enthält, nennt man partielle Differentialgleichung. Wir betrachten als Beispiel die Laplacegleichung zur Berechnung einer stationären Temperaturverteilung $u(x, y)$ auf einem Quadrat Q mit Ecken $(0, 0)$,

$(\pi, 0)$, $(0, \pi)$ und (π, π). Die Differentialgleichung sowie Randbedingungen sind

$$\begin{aligned}
\Delta u(x,y) &= 0, \\
u(0,y) &= 0 \text{ wobei } 0 < y < \pi, \\
u(x,0) &= 0 \text{ wobei } 0 < x < \pi, \\
u(x,\pi) &= 0 \text{ wobei } 0 < x < \pi, \\
u(\pi,y) &= \sin(4y) \text{ wobei } 0 < y < \pi.
\end{aligned}$$

Schritt 1: Separationsansatz
Wir machen den Ansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ und finden $X''Y + Y''X = 0$ und damit

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\omega^2.$$

Das liefert $X'' - \omega^2 X = 0$ und $Y'' + \omega^2 Y = 0$ mit den Lösungen $Y(y) = A\cos(\omega y) + B\sin(\omega y)$ und $X(x) = Ce^{\omega x} + De^{-\omega x}$. Die Randbedingungen $Y(0) = Y(\pi) = 0$ ergeben $A = 0$ und $\omega = k \in \mathbb{N}$ also ist $Y(y) = B\sin(ky)$. Und aus $X(0) = 0$ folgt $C = -D$ und damit $X(x) = C\left(e^{kx} - e^{-kx}\right)$.

Schritt 2: Superposition
Die Superposition von Lösungen ergibt

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sin(ky)\left(e^{kx} - e^{-kx}\right).$$

Nun gibt die letzte Randbedingung $u(\pi,y) = \sin(4y)$ und Koeffizientenvergleich gibt $C_4 = \frac{1}{e^{4\pi} - e^{-4\pi}}$ und $C_k = 0$ sonst. Damit folgt für die Lösung

$$u(x,y) = \sin(4y)\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{e^{4\pi} - e^{-4\pi}} = \sin(4y)\frac{\sinh(4x)}{\sinh(4\pi)}.$$

Das Maximumprinzip sagt aus, dass das Maximum dieser Lösung auf dem Rand angenommen wird und zwar dort wo $u(\pi,y) = \sin(4y)$, weil sonst die Funktion den Wert 0 auf dem Rand annimmt. Man findet über die Berechnung des Maximums, dass der Maximalwert 1 in den Punkten $\left(\pi, \frac{\pi}{8}\right)$ und $\left(\pi, \frac{5\pi}{8}\right)$ ist.

Bemerkung: Die Laplacegleichung $\Delta u = 0$ beschreibt die stationäre (zeitunabhängige) Temperaturverteilung, wohingegen die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = D\Delta u$ die Zeitabhängigkeit berücksichtigt.

Fourierreihen

Mit Fourierreihen ist es möglich periodische Funktionen in eine Funktionenreihe aus Sinus- und Kosinusfunktionen zu entwickeln. Durch die Identität

$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$, lassen sich Fourierreihen auch über die komplexe Exponentialfunktion darstellen. Wir beginnen mit der reellen Darstellung und definieren die Fourierreihe einer 2π-periodischen Funktion als

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

wobei die Fourierkoeffizienten a_0, a_n, $b_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dabei ist

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Ist f eine gerade (ungerade) Funktion, so ist $b_n = 0$ ($a_n = 0$).

Die komplexe Darstellung der Fourierreihe für eine Funktion mit Periode $T > 0$ lautet

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega x) \text{ mit } c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\exp(-in\omega x)\mathrm{d}x,$$

wobei $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (für $T = 2\pi$ findet man wieder die 2π-periodischen Funktionen wie oberhalb).

Wir berechnen die komplexen und reellen Fourierkoeffizienten für die Funktion $g(x) = 2^x = e^{\ln(2)x}$, $x \in [0, 2)$ mit $T = 2$. Wir finden

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}\int_0^2 e^{(\ln(2)-in\pi)x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{1}{\ln(2)-in\pi}\, e^{(\ln(2)-in\pi)x}\Big|_0^2 \\ &= \frac{3}{2}\frac{1}{\ln(2)-in\pi}. \end{aligned}$$

Für die reellen Fourierkoeffizienten gilt

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 = \frac{3}{\ln(2)}, \\ a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\ln(2)-in\pi} + \frac{1}{\ln(2)+in\pi}\right) = \frac{3\ln(2)}{(\ln(2))^2 + n^2\pi^2}, \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) = \frac{3}{2}i\left(\frac{1}{\ln(2)-in\pi} - \frac{1}{\ln(2)+in\pi}\right) = -\frac{3n\pi}{(\ln(2))^2 + n^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Für zwei 2π-periodische Funktionen $f,\ g \in C^1([-\pi,\pi])$ ist die Faltung $h = f * g$ definiert als

$$h(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(x-u)\mathrm{d}u,\ x \in [-\pi,\pi].$$

Es seien f_n, g_n, h_n die komplexen Fourierkoeffizienten. Es gilt

$$h_n = 2\pi f_n g_n.$$

Fouriertransformation

Allgemeines

Für eine Funktion f mit $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \mathrm{d}t < \infty$ ist die Fouriertransformierte definiert als

$$\mathcal{F}\left[f\right](\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t.$$

Die inverse Fouriertransformation einer Funktion F ist

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F\right](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}t.$$

Man nennt $A_f(\omega) = |\mathcal{F}[f](\omega)|$ das Amplitudenspektrum einer Funktion f.

Wir betrachten nun ein Beispiel einer Fouriertransformation mit

$$f(t) = \begin{cases} 2, & |t| \leq a, \\ 0, & |t| > a. \end{cases}$$

Dann ist für $\omega \neq 0$

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-a}^{a} 2e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = -\frac{2}{i\omega} \left. e^{-i\omega t} \right|_{-a}^{a} = \frac{2}{i\omega} \left(e^{i\omega a} - e^{-i\omega a} \right) = \frac{4\sin(\omega a)}{\omega},$$

und für $\omega = 0$

$$\mathcal{F}[f](0) = \int_{-a}^{a} 2 = 4a.$$

Wir finden also für die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \begin{cases} \frac{4\sin(\omega a)}{\omega}, & \omega \neq 0, \\ 4a, & \omega = 0. \end{cases}$$

Das Amplitudenspektrum ist

$$A_f(\omega) = \begin{cases} \frac{4|\sin(\omega a)|}{|\omega|}, & \omega \neq 0, \\ 4a, & \omega = 0. \end{cases}$$

Eigenschaften

Für eine Funktion f mit $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$ und $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Eigenschaften der Fouriertransformation:

- Gerade Funktion: Ist f reell und gerade, so ist $F[f](\omega)$ reell. Denn $F[f](\omega) = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t$,
- Ungerade Funktion: Ist f reell und ungerade, so ist $F[f](\omega)$ imaginär. Denn $F[f](\omega) = -2i\int_0^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t$,
- Zeit-Skalierung: $\mathcal{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{a}\right),\ a \neq 0$,
- Verschiebung: $\mathcal{F}[f(t-a)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)]\,(\omega)\,e^{-i\omega a}$,
- Ableitung: $\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega\mathcal{F}[f](\omega)$.

Für zwei Funktionen $f,\ g$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$ und $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$ ist die Faltung definiert als

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)\mathrm{d}u.$$

Die Fouriertransformierte erfüllt den Faltungssatz $\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega)$.

Anwendung auf Differentialgleichungen

Wir betrachten die folgende gewöhnliche Differentialgleichung

$$-f''(t) + f(t) = g(t),\ t \in \mathbb{R} \text{ und } g(t) = \frac{1}{2}\exp(-|t|).$$

Schritt 1: Anwendung der Fouriertransformation

$$-\mathcal{F}\left[f''\right](\omega) + \mathcal{F}\left[f\right](\omega) = \mathcal{F}[g](\omega) \iff \omega^2\mathcal{F}[f](\omega) + \mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{1+\omega^2},$$

da $\mathcal{F}[g](\omega) = \dfrac{1}{2}\mathcal{F}[\exp(-|t|)] = \dfrac{1}{1+\omega^2}$.

Schritt 2: Auflösen nach $\mathcal{F}[f](\omega)$

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)^2.$$

Schritt 3: Berechnen der inversen Fouriertransformation

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[F](t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[g](\omega)\cdot\mathcal{F}[g](\omega)](t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(g*g)](t) \\
&= (g*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4}\exp(-|u|)\exp(-|t-u|)\mathrm{d}u \\
&= \begin{cases} \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{0} e^{u}e^{u-t}\mathrm{d}u + \frac{1}{4}\int_{0}^{t} e^{-u}e^{u-t}\mathrm{d}u + \frac{1}{4}\int_{t}^{\infty} e^{-u}e^{t-u}\mathrm{d}u & t\geq 0 \\ \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{t} e^{u}e^{u-t}\mathrm{d}u + \frac{1}{4}\int_{t}^{0} e^{u}e^{t-u}\mathrm{d}u + \frac{1}{4}\int_{t}^{\infty} e^{-u}e^{t-u}\mathrm{d}u & t<0 \end{cases} \\
&= \frac{1}{4}(1+|t|)e^{-|t|}.
\end{aligned}$$

Laplacetransformation

Allgemeines

Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ ist die Laplacetransformierte $\mathcal{L}f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t.$$

Wir betrachten die folgenden Beispiele:

- $f(t) = \Theta(t)$[1]: $\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty \Theta(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}t = s^{-1}$,
- $f(t) = 1_{\{a\leq t\leq b\}}(t)$: $\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty 1_{\{a\leq t\leq b\}}(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_a^b e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{e^{-sa}-e^{-sb}}{s}$,
- $f(t) = t$: $\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty te^{-st}\mathrm{d}t = \underbrace{-\left.\frac{te^{-st}}{s}\right|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s}\mathrm{d}t = s^{-2}$,
- $f(t) = t^n$ $(n\in\mathbb{N})$: $\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty t^n e^{-st}\mathrm{d}t = \underbrace{-\left.\frac{t^n e^{-st}}{s}\right|_0^\infty}_{=0} + n\int_0^\infty t^{n-1}\frac{e^{-st}}{s}\mathrm{d}t = \dots = n!s^{-(n+1)}$,
- $f(t) = \sin(at)$: $\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty \sin(at)e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-st}\left(e^{iat}-e^{-iat}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia}-\frac{1}{s+ia}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{s+ia}{s^2+a^2}-\frac{s-ia}{s^2+a^2}\right) = \frac{a}{s^2+a^2}$,

[1] Heaviside Funktion $\Theta(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t\geq 0 \end{cases}$.

- $f(t) = \cos(at)$: $\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty \cos(at)e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}\left(e^{iat} + e^{-iat}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{s+ia}{s^2+a^2} + \frac{s-ia}{s^2+a^2}\right) = \frac{s}{s^2+a^2}$,
- $f(t) = \exp(at)$ $(a < s)$: $\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}\mathrm{d}t = (s-a)^{-1}$.

Tabelle 1 enthält eine Zusammenfassung dieser Laplacetransformationen.

Tabelle 1: Laplacetransformationen einiger elementarer Funktionen.

Funktion	Laplacetransformation
$\Theta(t)$	s^{-1}
$1_{\{a\leq t\leq b\}}(t)$	$\frac{e^{-sa}-e^{-sb}}{s}$
t	s^{-2}
t^n	$n!s^{-(n+1)}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\exp(at)$	$(s-a)^{-1}$

Eigenschaften

Mit $f, g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ und $a, b \in \mathbb{C}$ betrachten wir die Eigenschaften der Laplacetransformation:

- Linearität: $\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}f + b\mathcal{L}g$,
- Zeit-Skalierung: $\mathcal{L}\left(f(at)\right)(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\left(f(t)\right)\left(\frac{s}{a}\right)$,
- Verschiebung: $\mathcal{L}\left(f(t-a)\right)(s) = e^{-as}\mathcal{L}f(s)$ und $\mathcal{L}\left(f(t+a)\right)(s) = e^{as}\left(\mathcal{L}f(s) - \int_0^a e^{-at}f(t)\mathrm{d}t\right)$,
- Dämpfung: $\mathcal{L}\left(e^{-at}f(t)\right)(s) = \mathcal{L}f(s+a)$,
- Ableitungseigenschaft: $\mathcal{L}f'(s) = s\mathcal{L}f(s) - f(0)$,
- Allgemeine Ableitungseigenschaft: $\mathcal{L}f^{(n)}(s) = s^n\mathcal{L}f(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$,
- Differenzierbarkeit: $\left(\mathcal{L}f\right)^{(n)}(s) = \mathcal{L}\left((-t)^n f(t)\right)(s)$,
- Integrationseigenschaft: $\mathcal{L}g(s) = \frac{\mathcal{L}f(s)}{s}$ für $g(t) = \int_0^t f(u)\mathrm{d}u$,
- Integration: $\int_s^\infty \mathcal{L}f(u)\mathrm{d}u = \mathcal{L}\left(t^{-1}f(t)\right)(s)$.

Die Faltung zweier Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ ist definiert als

$$(f * g)(t) = f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Für die Laplacetransformation gilt der Faltungssatz $\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \mathcal{L}f(s)\mathcal{L}g(s)$.

Wir betrachten nun ein Beispiel für die inverse Laplacetransformation. Sei $\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s^2+1}$ und wir wissen, dass

$\mathcal{L}(1)(s) = \dfrac{1}{s}$ und $\mathcal{L}(\sin(t))(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$, womit auch gilt $\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}(1)(s)\cdot\mathcal{L}(\sin(t))(s)$.

Mit dem Faltungssatz findet man $\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}(1 * \sin(t))(s)$. Damit erhält man

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}(1 * \sin(t))(t) = 1 * \sin(t) = \int_0^t 1 \cdot \sin(u)\mathrm{d}u = 1 - \cos(t).$$

Die Faltung ist eine symmetrische Operation da

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau = -\int_t^0 f(t-\widetilde{\tau})g(\widetilde{\tau})\mathrm{d}\widetilde{\tau} = \int_0^t f(t-\widetilde{\tau})g(\widetilde{\tau})\mathrm{d}\widetilde{\tau}.$$

Im letzten Schritt kann man auch τ anstatt von $\widetilde{\tau}$ schreiben, um die Symmetrie zum ersten Integral deutlicher zu machen. Im zweiten Schritt wurde $\widetilde{\tau} = t - \tau$ gesetzt und die Integralgrenzen entsprechend angepasst. Insbesondere ist also im oberen Beispiel sowohl

$$\int_0^t 1 \cdot \sin(u)\mathrm{d}u = 1 - \cos(t)$$

als auch

$$\int_0^t 1 \cdot \sin(t-u)\mathrm{d}u = 1 - \cos(t).$$

Die Laplacetransformation einer P-periodischen Funktion $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ $(P > 0)$ ist

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{1-e^{-sP}} \int_0^P e^{-st}f(t)\mathrm{d}t.$$

Anwendung auf Differentialgleichungen

Wir betrachten die folgende gewöhnliche Differentialgleichung

$$x'(t) + 2x(t) = 2t - 4, \text{ mit } x(0) = 1.$$

Schritt 1: Anwendung der Laplacetransformation

$$\mathcal{L}\{x'+2x\} = \mathcal{L}(2t-4) \iff \mathcal{L}\{x'\}+2\mathcal{L}x = 2\mathcal{L}(t)-4\mathcal{L}(1) \iff s\mathcal{L}x(s)-x(0)+2\mathcal{L}x(s) = \frac{2}{s^2}-\frac{4}{s}.$$

Schritt 2: Auflösen nach $\mathcal{L}x$

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{2}{s^2(s+2)} - \frac{4}{s(s+2)} + \frac{1}{s+2}.$$

Schritt 3: Berechnen der inversen Laplacetransformation

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+2)}\right) - 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s+2)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)\\
&= 2\left(t * e^{-2t}\right)(t) - 4\left(1 * e^{-2t}\right)(t) + e^{-2t}\\
&= 2\int_0^t (t-\tau)e^{-2\tau}\mathrm{d}\tau - 4\int_0^t 1\cdot e^{-2\tau}\mathrm{d}\tau + e^{-2t}\\
&= t + \frac{7e^{-2t}-5}{2}.
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir eine weitere Differentialgleichung, für welche wir die Partialbruchzerlegung benötigen

$$x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = 10,$$
$$\text{mit } x'(0) = x(0) = 0.$$

Schritt 1: Anwendung der Laplacetransformation

$$\mathcal{L}\{x''\} + 5\mathcal{L}\{x'\} + 4\mathcal{L}\{x\} = 10\mathcal{L}(1).$$

Schritt 2: Auflösen nach $\mathcal{L}x$

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{10\mathcal{L}(1)}{4+5s+s^2} = \frac{10}{s(s+1)(s+4)}.$$

Schritt 3: Anwenden der Partialbruchzerlegung
Mit den Konstanten A, B, C machen wir den Ansatz (reelle Nullstellen)

$$\frac{10}{s(s+1)(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+4}.$$

Multiplizieren beider Seiten der letzten Gleichung mit $s(s+1)(s+4)$ führt auf

$$10 = A(s+1)(s+4) + Bs(s+4) + Cs(s+1) = (A+B+C)s^2 + (5A+4B+C)s + 4A.$$

Vergleichen der Koeffizienten liefert

$$A+B+C = 0,\ 5A+4B+C = 0,\ 4A = 10.$$

Man findet $A = \frac{10}{4}$, $B = -\frac{10}{3}$, $C = \frac{10}{12}$. Damit ist

$$\mathcal{L}x(s) = 10\left(\frac{1}{4s} - \frac{1}{3(s+1)} + \frac{1}{12(s+4)}\right).$$

Schritt 4: Berechnen der inversen Laplacetransformation

$$x(t) = 10\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{12}e^{-4t}\right).$$

Wir betrachten noch weitere Beispiele und beginnen mit

$$\begin{aligned}&2x''(t) + 4x(t) = \cos(3t),\\ &\text{mit } x'(0) = x(0) = 0.\end{aligned}$$

Nach der Anwendung der Laplacetransformation finden wir

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{\mathcal{L}(\cos(3t))(s)}{4+2s^2} = \frac{s}{s^2+9} \cdot \frac{1}{4+2s^2}.$$

Die Partialbruchzerlegung für imagninäre Nullstellen liefert mit den Konstanten A, B, C und D

$$\frac{s}{(s^2+9)(4+2s^2)} = \frac{A+Bs}{s^2+9} + \frac{C+Ds}{2s^2+4}.$$

Damit ist $A = 0$, $B = -\frac{1}{14}$, $C = 0$ und $D = \frac{1}{7}$ und

$$\frac{s}{(s^2+9)(4+2s^2)} = \frac{1}{14}\left(\frac{s}{s^2+2} - \frac{s}{s^2+9}\right).$$

Und die Lösung der Differentialgleichung ist

$$x(t) = \frac{1}{14}\left(\cos(\sqrt{2}t) - \cos(3t)\right).$$

Erlaubt man eine Partialbruchzerlegung direkt in imaginäre Nullstellen findet man

$$\frac{s}{(s^2+9)(4+2s^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{s-3i} + \frac{B}{s+3i} + \frac{C}{s-\sqrt{2}i} + \frac{D}{s+\sqrt{2}i}\right).$$

Das liefert $A = B = -\frac{1}{14}$ sowie $C = D = \frac{1}{14}$. Und damit auch

$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{14}\left(e^{i\sqrt{2}t} + e^{-i\sqrt{2}t} - e^{i3t} - e^{-i3t}\right) = \frac{1}{14}\left(\cos(\sqrt{2}t) - \cos(3t)\right).$$

Ein weiteres Beispiel ist

$$x'(t) + x(t) = e^t \text{ mit } x(0) = e.$$

Hier ist

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)} + \frac{e}{(s+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{e}{s+1}.$$

Und damit findet man die Lösung

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t} + 2e^{1-t}\right).$$

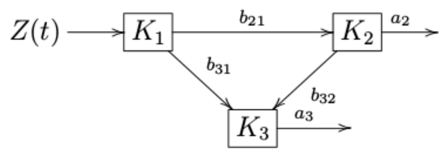

Abbildung 1: Ein Beispiel eines 3-Kompartiment-Systems.

Kompartiment-Modelle

Das Modellieren von Ausbreitungsprozessen geschieht oft mit Kompartiment-Modellen, bei welchen zum Beispiel biologische oder chemische Substanzen von einem System in ein anderes fliessen. Wir betrachten hier ein Beispiel eines 3-Kompartiment-Systems mit einer Zufuhr $Z(t)$. Das Modell ist in Abbildung 1 dargestellt. Im Kompartiment K_i ist die Stoffmenge $y_i(t)$ vorhanden. Die Zeitentwicklung ist gegeben durch

$$y'(t) = Ay(t) + g(t),$$

wobei $g(t) = (Z(t), 0, 0)^T$ und $y(t) = (K_1(t), K_2(t), K_3(t))^T$. Aus Abbildung 1 lesen wir ab

$$\begin{aligned} K_1'(t) &= -(b_{21} + b_{31})K_1(t) + Z(t), \\ K_2'(t) &= b_{21}K_1(t) - (a_2 + b_{32})K_2(t), \\ K_3'(t) &= b_{31}K_1(t) + b_{32}K_2(t) - a_3K_3(t). \end{aligned}$$

Damit ist die Matrix A gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -(b_{21} + b_{31}) & 0 & 0 \\ b_{21} & -(a_2 + b_{32}) & 0 \\ b_{31} & b_{32} & -a_3 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen $Z(t) = e^{-t}$, $a_2 = a_3 = b_{31} = b_{21} = \frac{1}{2}$ und $b_{32} = \frac{1}{4}$ und finden die Diagonalmatrix D über

$$D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Mit $y(t) = Tx(t)$ und $h(t) = T^{-1}g(t) = e^{-t}(-2, -2, 2)^T = e^{-t}k$ folgt eine entkoppelte Differentialgleichung aufgrund der Diagonalform von D

$$x'(t) = Dx(t) + e^{-t}k.$$

Wir verwenden den Ansatz $x_i(t) = C(t)e^{\lambda_i t}$ (Variation der Konstanten) und finden

$$\left(C'(t) + \lambda_i C(t)\right) e^{\lambda_i t} = \lambda_i C(t) e^{\lambda_i t} + k_i e^{-t} \iff C'(t) = k_i e^{-(1+\lambda_i)t}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
&\text{Wenn } 1+\lambda_i \neq 0\text{: } x_i = -\frac{k_i}{1+\lambda_i} e^{-t} + c_i e^{\lambda_i t}, \\
&\text{Wenn } 1+\lambda_i = 0\text{: } x_i = k_i t e^{\lambda_i t} + c_i e^{\lambda_i t}.
\end{aligned}$$

Und mit $y(t) = Tx(t)$ findet man die Lösung

$$y(t) = \begin{pmatrix} te^{-t} - c_1 e^{-t}/2 \\ -(2t+8)e^{-t} + c_1 e^{-t} - c_2 e^{-3t/4} \\ 4e^{-t} + c_2 e^{-3t/4} + c_3 e^{-t/2} \end{pmatrix}.$$

In diesem Beispiel gilt $y(t) \to 0$ für $t \to \infty$ (trivialer stationärer Zustand). Im Allgemeinen findet man in Kompartimentmodellen oft $y(t) \to \text{const.}$ für $t \to \infty$. Man bezeichnet diese Lösungen auch als stationäre Zustände, da keine Zeitabhängigkeit mehr vorliegt. Ein nichttrivialer stationärer Zustand ist ein von Null verschiedener stationärer Zustand.