PVK Mathematik III
Tag 2

Lucas Böttcher

ETH Zürich
Institut für Baustoffe
Wolfgang-Pauli-Str. 27
HIT G 23.8
8093 Zürich

lucasb@ethz.ch

January 4, 2018

Übersicht

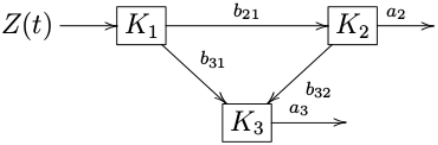
Kurstag	**Inhalt**
Tag 1	Lineare Algebra, Differentialgleichungen
Tag 2	Kompartimentmodelle, Fourierreihen, Fouriertransformationen, Laplacetransformationen

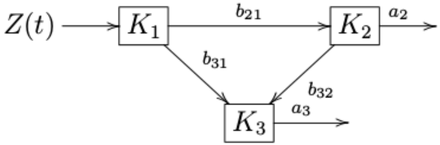
Kapitel III
Kompartimentmodelle
(Sektion 3 im Skript)

Kompartimentmodelle

Lernziele: Erstellen und Analysieren von mathematischen Modellen, welche einfache biologische und chemische Prozesse beschreiben.

Kompartimentmodelle



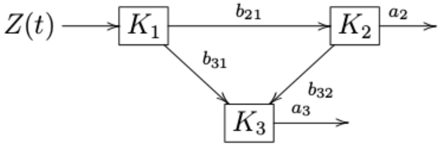


Im Kompartiment K_i ist die Stoffmenge $y_i(t)$ vorhanden. Die Zeitentwicklung ist gegeben durch

$$y'(t) = Ay(t) + g(t),$$

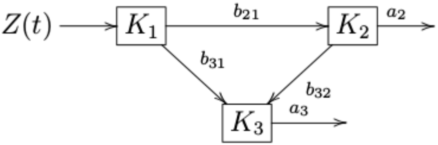
wobei $g(t) = (Z(t), 0, 0)^T$ und $y(t) = (K_1(t), K_2(t), K_3(t))^T$.

Kompartimentmodelle



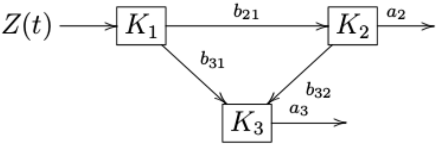
$$
\begin{aligned}
K_1'(t) &= -(b_{21} + b_{31})K_1(t) + Z(t), \\
K_2'(t) &= b_{21}K_1(t) - (a_2 + b_{32})K_2(t), \\
K_3'(t) &= b_{31}K_1(t) + b_{32}K_2(t) - a_3K_3(t).
\end{aligned}
$$

Kompartimentmodelle



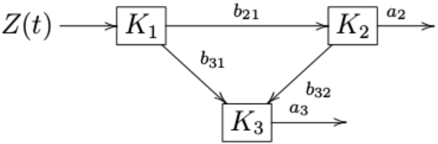
$$A = \begin{pmatrix} -(b_{21}+b_{31}) & 0 & 0 \\ b_{21} & -(a_2+b_{32}) & 0 \\ b_{31} & b_{32} & -a_3 \end{pmatrix}.$$

Kompartimentmodelle



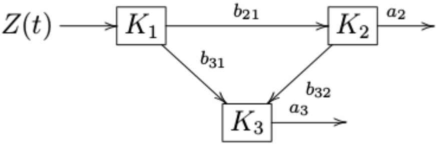
Wir setzen $Z(t) = e^{-t}$, $a_2 = a_3 = b_{31} = b_{21} = \frac{1}{2}$ und $b_{32} = \frac{1}{4}$ und finden die Diagonalmatrix D über

$$D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$



Mit $y(t) = Tx(t)$ und $h(t) = T^{-1}g(t) = e^{-t}(-2, -2, 2)^T = e^{-t}k$ folgt eine entkoppelte Differentialgleichung aufgrund der Diagonalform von D

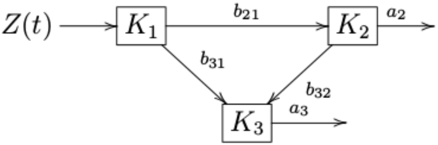
$$x'(t) = Dx(t) + e^{-t}k.$$



Mit $y(t) = Tx(t)$ und $h(t) = T^{-1}g(t) = e^{-t}(-2,-2,2)^T = e^{-t}k$ folgt eine entkoppelte Differentialgleichung aufgrund der Diagonalform von D

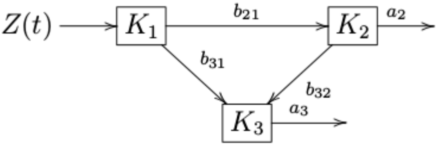
$$x'(t) = Dx(t) + e^{-t}k.$$

Kompartimentmodelle



Wir verwenden den Ansatz $x_i(t) = C(t)e^{\lambda_i t}$ (Variation der Konstanten) und finden

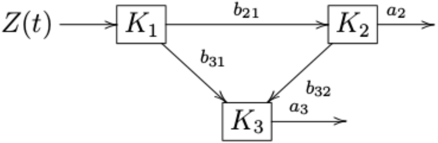
$$\left(C'(t) + \lambda_i C(t)\right) e^{\lambda_i t} = \lambda_i C(t) e^{\lambda_i t} + k_i e^{-t} \iff C'(t) = k_i e^{-(1+\lambda_i)t}.$$



Damit folgt

$$\text{Wenn } 1+\lambda_i \neq 0\text{: } x_i = -\frac{k_i}{1+\lambda_i} e^{-t} + c_i e^{\lambda_i t},$$
$$\text{Wenn } 1+\lambda_i = 0\text{: } x_i = k_i t e^{\lambda_i t} + c_i e^{\lambda_i t}.$$

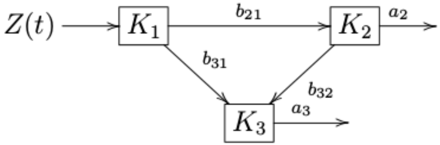
Kompartimentmodelle



Und mit $y(t) = Tx(t)$ findet man die Lösung

$$y(t) = \begin{pmatrix} te^{-t} - c_1 e^{-t}/2 \\ -(2t+8)e^{-t} + c_1 e^{-t} - c_2 e^{-3t/4} \\ 4e^{-t} + c_2 e^{-3t/4} + c_3 e^{-t/2} \end{pmatrix}.$$

Kompartimentmodelle



Und mit $y(t) = Tx(t)$ findet man die Lösung

$$y(t) = \begin{pmatrix} te^{-t} - c_1 e^{-t}/2 \\ -(2t+8)e^{-t} + c_1 e^{-t} - c_2 e^{-3t/4} \\ 4e^{-t} + c_2 e^{-3t/4} + c_3 e^{-t/2} \end{pmatrix}.$$

In diesem Beispiel gilt $y(t) \to 0$ für $t \to \infty$ (trivialer stationärer Zustand).

Kapitel IV
Fourieranalysis
(Sektion 1 im Skript)

Fourieranalysis

Lernziele: Kennen und anwenden von Fourierreihen und Fouriertransformationen, z.B. für das Lösen von Differentialgleichungen.

Fourieranalysis

Wir beginnen mit der reellen Darstellung und definieren die Fourierreihe einer 2π-periodischen Funktion als

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

Fourieranalysis

Wir beginnen mit der reellen Darstellung und definieren die Fourierreihe einer 2π-periodischen Funktion als

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right),$$

wobei die Fourierkoeffizienten $a_0,\ a_n,\ b_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dabei ist

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \mathrm{d}x, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \mathrm{d}x, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Fourieranalysis

Wir beginnen mit der reellen Darstellung und definieren die Fourierreihe einer 2π-periodischen Funktion als

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right),$$

wobei für die Fourierkoeffizienten gilt a_0, a_n, $b_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dabei ist

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \mathrm{d}x,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \mathrm{d}x,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \mathrm{d}x.$$

Ist f eine gerade (ungerade) Funktion, so ist $b_n = 0$ ($a_n = 0$).

Fourieranalysis

Die komplexe Darstellung der Fourierreihe für eine Funktion mit Periode $T > 0$ lautet

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega x) \text{ mit } c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\exp(-in\omega x)\mathrm{d}x,$$

wobei $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (für $T = 2\pi$ findet man wieder die 2π-periodischen Funktionen wie auf der vorherigen Folie).

Fourieranalysis

Für zwei 2π-periodische Funktionen $f,\ g \in C^1([-\pi,\pi])$ ist die Faltung $h = f * g$ definiert als

$$h(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(x-u)\mathrm{d}u,\ x \in [-\pi,\pi].$$

Es seien f_n, g_n, h_n die komplexen Fourierkoeffizienten. Es gilt

$$h_n = 2\pi f_n g_n.$$

Wir berechnen die komplexen und reellen Fourierkoeffizienten für die Funktion $g(x) = 2^x = e^{\ln(2)x}$, $x \in [0, 2)$ mit $T = 2$. Wir finden

$$c_n = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{(\ln(2)-in\pi)x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{1}{\ln(2)-in\pi}\; e^{(\ln(2)-in\pi)x}\Big|_0^2 \\ = \frac{3}{2}\frac{1}{\ln(2)-in\pi}.$$

Für die reellen Fourierkoeffizienten gilt

$$a_0 = 2c_0 = \frac{3}{\ln(2)},$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\ln(2)-in\pi} + \frac{1}{\ln(2)+in\pi}\right) = \frac{3\ln(2)}{(\ln(2))^2 + n^2\pi^2},$$

$$a_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{3}{2}i\left(\frac{1}{\ln(2)-in\pi} - \frac{1}{\ln(2)+in\pi}\right) = -\frac{3n\pi}{(\ln(2))^2 + n^2\pi^2}.$$

Fourieranalysis

Für eine Funktion f mit $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$ ist die Fouriertransformierte definiert als

$$\mathcal{F}[f](\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

Fourieranalysis

Für eine Funktion f mit $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$ ist die Fouriertransformierte definiert als

$$\mathcal{F}\left[f\right](\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

Die inverse Fouriertransformation einer Funktion F ist

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F\right](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}t.$$

Fourieranalysis

Für eine Funktion f mit $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \mathrm{d}t < \infty$ ist die Fouriertransformierte definiert als

$$\mathcal{F}\left[f\right](\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t.$$

Die inverse Fouriertransformation einer Funktion F ist

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F\right](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}t.$$

Man nennt $A_f(\omega) = |\mathcal{F}[f](\omega)|$ das Amplitudenspektrum einer Funktion f.

Fourieranalysis

Wir betrachten ein Beispiel einer Fouriertransformation mit

$$f(t) = \begin{cases} 2, & |t| \leq a, \\ 0, & |t| > a. \end{cases}$$

Dann ist für $\omega \neq 0$

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-a}^{a} 2e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = -\frac{2}{i\omega} \, e^{-i\omega t}\Big|_{-a}^{a} = \frac{2}{i\omega} \left(e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}\right) = \frac{4\sin(\omega a)}{\omega},$$

und für $\omega = 0$

$$\mathcal{F}[f](0) = \int_{-a}^{a} 2 = 4a.$$

Wir finden also für die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \begin{cases} \frac{4\sin(\omega a)}{\omega}, & \omega \neq 0, \\ 4a, & \omega = 0. \end{cases}$$

Eigenschaften der Fouriertransformation:

- Gerade Funktion: Ist f reell und gerade, so ist $F[f](\omega)$ reell. Denn $F[f](\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t$,

Eigenschaften der Fouriertransformation:

- Gerade Funktion: Ist f reell und gerade, so ist $F[f](\omega)$ reell. Denn $F[f](\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t$,
- Ungerade Funktion: Ist f reell und ungerade, so ist $F[f](\omega)$ imaginär. Denn $F[f](\omega) = -2i\int_0^\infty f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t$,

Eigenschaften der Fouriertransformation:

- Gerade Funktion: Ist f reell und gerade, so ist $F[f](\omega)$ reell. Denn $F[f](\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t$,
- Ungerade Funktion: Ist f reell und ungerade, so ist $F[f](\omega)$ imaginär. Denn $F[f](\omega) = -2i\int_0^\infty f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t$,
- Zeit-Skalierung: $\mathcal{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{a}\right),\ a \neq 0$,

Fourieranalysis

Eigenschaften der Fouriertransformation:

- Gerade Funktion: Ist f reell und gerade, so ist $F[f](\omega)$ reell. Denn $F[f](\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t$,
- Ungerade Funktion: Ist f reell und ungerade, so ist $F[f](\omega)$ imaginär. Denn $F[f](\omega) = -2i\int_0^\infty f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t$,
- Zeit-Skalierung: $\mathcal{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{a}\right),\ a \neq 0$,
- Verschiebung: $\mathcal{F}[f(t-a)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega)\, e^{-i\omega a}$,

Fourieranalysis

Eigenschaften der Fouriertransformation:

- Gerade Funktion: Ist f reell und gerade, so ist $F[f](\omega)$ reell. Denn $F[f](\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t$,
- Ungerade Funktion: Ist f reell und ungerade, so ist $F[f](\omega)$ imaginär. Denn $F[f](\omega) = -2i\int_0^\infty f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t$,
- Zeit-Skalierung: $\mathcal{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{a}\right),\ a \neq 0$,
- Verschiebung: $\mathcal{F}[f(t-a)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega)\, e^{-i\omega a}$,
- Ableitung: $\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega\mathcal{F}[f](\omega)$.

Fourieranalysis

Für zwei Funktionen f, g mit $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \mathrm{d}t < \infty$ und $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \mathrm{d}t < \infty$ ist die Faltung definiert als

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(t-u) \mathrm{d}u.$$

Die Fouriertransformierte erfüllt den Faltungssatz

$$\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega).$$

Wir betrachten die folgende gewöhnliche Differentialgleichung

$$-f''(t) + f(t) = g(t),\ t \in \mathbb{R} \text{ und } g(t) = \frac{1}{2}\exp(-|t|).$$

Schritt 1: Anwendung der Fouriertransformation

$$-\mathcal{F}\left[f''\right](\omega) + \mathcal{F}\left[f\right](\omega) = \mathcal{F}[g](\omega) \iff \omega^2\mathcal{F}[f](\omega) + \mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{1+\omega^2},$$

da $\mathcal{F}[g](\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[\exp(-|t|)] = \frac{1}{1+\omega^2}$.

Schritt 2: Auflösen nach $\mathcal{F}[f](\omega)$

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)^2.$$

Schritt 3: Berechnen der inversen Fouriertransformation

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F](t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[g](\omega)\cdot\mathcal{F}[g](\omega)](t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(g*g)](t)$$

$$= (g*g)(t) = \int^{\infty} \frac{1}{4}\exp(-|u|)\exp(-|t-u|)\mathrm{d}u = \frac{1}{4}(1+|t|)e^{-|t|}.$$

Wir betrachten die folgende gewöhnliche Differentialgleichung

$$-f''(t) + f(t) = g(t),\ \ t \in \mathbb{R} \text{ und } g(t) = \frac{1}{2}\exp(-|t|).$$

Schritt 1: Anwendung der Fouriertransformation

$$-\mathcal{F}\left[f''\right](\omega) + \mathcal{F}\left[f\right](\omega) = \mathcal{F}[g](\omega) \iff \omega^2\mathcal{F}[f](\omega) + \mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{1+\omega^2},$$

da $\mathcal{F}[g](\omega) = \dfrac{1}{2}\mathcal{F}[\exp(-|t|)] = \dfrac{1}{1+\omega^2}$.

Wir betrachten die folgende gewöhnliche Differentialgleichung

$$-f''(t) + f(t) = g(t),\ \ t \in \mathbb{R} \text{ und } g(t) = \frac{1}{2}\exp(-|t|).$$

Schritt 2: Auflösen nach $\mathcal{F}[f](\omega)$

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)^2.$$

Wir betrachten die folgende gewöhnliche Differentialgleichung

$$-f''(t) + f(t) = g(t),\ \ t \in \mathbb{R} \text{ und } g(t) = \frac{1}{2}\exp(-|t|).$$

Schritt 3: Berechnen der inversen Fouriertransformation

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[F](t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[g](\omega)\cdot\mathcal{F}[g](\omega)](t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(g*g)](t) \\ &= (g*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4}\exp(-|u|)\exp(-|t-u|)\mathrm{d}u = \frac{1}{4}(1+|t|)e^{-|t|}. \end{aligned}$$

Kapitel IV
Laplacetransformation
(Sektion 3 im Skript)

Laplacetransformation

Lernziele: Kennen der Laplacetransformation für elementare Funktionen und Anwenden dieser zum Lösen von Differentialgleichungen.

Laplacetransformation

Für eine Funktion $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ ist die Laplacetransformierte $\mathcal{L}f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t.$$

Für $f(t) = \Theta(t)$:

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty \Theta(t) e^{-st} \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st} \mathrm{d}t = s^{-1}.$$

Laplacetransformation

Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ ist die Laplacetransformierte $\mathcal{L}f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t.$$

Für $f(t) = 1_{\{a \leq t \leq b\}}(t)$:

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty 1_{\{a \leq t \leq b\}}(t) e^{-st} \mathrm{d}t = \int_a^b e^{-st} \mathrm{d}t = \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s}.$$

Laplacetransformation

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ ist die Laplacetransformierte $\mathcal{L}f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t.$$

Für $f(t) = t$:

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty t e^{-st} \mathrm{d}t = \underbrace{- \left. \frac{t e^{-st}}{s} \right|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s} \mathrm{d}t = s^{-2}.$$

Laplacetransformation

Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ ist die Laplacetransformierte $\mathcal{L}f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t.$$

Für $f(t) = t^n$ $(n \in \mathbb{N})$:

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty t^n e^{-st} \mathrm{d}t = \underbrace{- \left. \frac{t^n e^{-st}}{s} \right|_0^\infty}_{=0} + n \int_0^\infty t^{n-1} \frac{e^{-st}}{s} \mathrm{d}t$$

$$= \cdots = n! s^{-(n+1)}.$$

Laplacetransformation

Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ ist die Laplacetransformierte $\mathcal{L}f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t.$$

Für $f(t) = \sin(at)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(s) &= \int_0^\infty \sin(at) e^{-st} \mathrm{d}t = \frac{1}{2i} \int_0^\infty e^{-st} \left(e^{iat} - e^{-iat}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{s+ia}{s^2+a^2} - \frac{s-ia}{s^2+a^2}\right) = \frac{a}{s^2+a^2}.\end{aligned}$$

Laplacetransformation

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ ist die Laplacetransformierte $\mathcal{L}f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t.$$

Für $f(t) = \cos(at)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(s) &= \int_0^\infty \cos(at) e^{-st} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-st} \left(e^{iat} + e^{-iat}\right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s - ia} - \frac{1}{s + ia} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{s + ia}{s^2 + a^2} + \frac{s - ia}{s^2 + a^2} \right) = \frac{s}{s^2 + a^2}.\end{aligned}$$

Laplacetransformation

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ ist die Laplacetransformierte $\mathcal{L}f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t.$$

Für $f(t) = \exp(at)$ $(a < s)$:

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} \mathrm{d}t = (s - a)^{-1}.$$

Laplacetransformation

Eigenschaften der Laplacetransformation:

- Linearität: $\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}f + b\mathcal{L}g$,

Laplacetransformation

Eigenschaften der Laplacetransformation:

- Linearität: $\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}f + b\mathcal{L}g$,
- Zeit-Skalierung: $\mathcal{L}\left(f(at)\right)(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\left(f(t)\right)\left(\frac{s}{a}\right)$,

Laplacetransformation

Eigenschaften der Laplacetransformation:

- Linearität: $\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}f + b\mathcal{L}g$,
- Zeit-Skalierung: $\mathcal{L}\left(f(at)\right)(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\left(f(t)\right)\left(\frac{s}{a}\right)$,
- Verschiebung: $\mathcal{L}\left(f(t-a)\right)(s) = e^{-as}\mathcal{L}f(s)$ und $\mathcal{L}\left(f(t+a)\right)(s) = e^{as}\left(\mathcal{L}f(s) - \int_0^a e^{-at}f(t)\mathrm{d}t\right)$,
- Dämpfung: $\mathcal{L}\left(e^{-at}f(t)\right)(s) = \mathcal{L}f(s+a)$,

Laplacetransformation

Eigenschaften der Laplacetransformation:

- Linearität: $\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}f + b\mathcal{L}g$,
- Zeit-Skalierung: $\mathcal{L}\left(f(at)\right)(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\left(f(t)\right)\left(\frac{s}{a}\right)$,
- Verschiebung: $\mathcal{L}\left(f(t-a)\right)(s) = e^{-as}\mathcal{L}f(s)$ und
  $\mathcal{L}\left(f(t+a)\right)(s) = e^{as}\left(\mathcal{L}f(s) - \int_0^a e^{-at}f(t)\mathrm{d}t\right)$,
- Dämpfung: $\mathcal{L}\left(e^{-at}f(t)\right)(s) = \mathcal{L}f(s+a)$,
- Ableitungseigenschaft: $\mathcal{L}f'(s) = s\mathcal{L}f(s) - f(0)$,

Eigenschaften der Laplacetransformation:

- Linearität: $\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}f + b\mathcal{L}g$,
- Zeit-Skalierung: $\mathcal{L}\left(f(at)\right)(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\left(f(t)\right)\left(\frac{s}{a}\right)$,
- Verschiebung: $\mathcal{L}\left(f(t-a)\right)(s) = e^{-as}\mathcal{L}f(s)$ und $\mathcal{L}\left(f(t+a)\right)(s) = e^{as}\left(\mathcal{L}f(s) - \int_0^a e^{-at}f(t)\mathrm{d}t\right)$,
- Dämpfung: $\mathcal{L}\left(e^{-at}f(t)\right)(s) = \mathcal{L}f(s+a)$,
- Ableitungseigenschaft: $\mathcal{L}f'(s) = s\mathcal{L}f(s) - f(0)$,
- Allgemeine Ableitungseigenschaft: $\mathcal{L}f^{(n)}(s) = s^n\mathcal{L}f(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$,

Eigenschaften der Laplacetransformation:

- Linearität: $\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}f + b\mathcal{L}g$,
- Zeit-Skalierung: $\mathcal{L}\left(f(at)\right)(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\left(f(t)\right)\left(\frac{s}{a}\right)$,
- Verschiebung: $\mathcal{L}\left(f(t-a)\right)(s) = e^{-as}\mathcal{L}f(s)$ und $\mathcal{L}\left(f(t+a)\right)(s) = e^{as}\left(\mathcal{L}f(s) - \int_0^a e^{-at}f(t)\mathrm{d}t\right)$,
- Dämpfung: $\mathcal{L}\left(e^{-at}f(t)\right)(s) = \mathcal{L}f(s+a)$,
- Ableitungseigenschaft: $\mathcal{L}f'(s) = s\mathcal{L}f(s) - f(0)$,
- Allgemeine Ableitungseigenschaft: $\mathcal{L}f^{(n)}(s) = s^n\mathcal{L}f(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$,
- Differenzierbarkeit: $\left(\mathcal{L}f\right)^{(n)}(s) = \mathcal{L}\left((-t)^n f(t)\right)(s)$,

Eigenschaften der Laplacetransformation:

- Linearität: $\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}f + b\mathcal{L}g$,
- Zeit-Skalierung: $\mathcal{L}\left(f(at)\right)(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\left(f(t)\right)\left(\frac{s}{a}\right)$,
- Verschiebung: $\mathcal{L}\left(f(t-a)\right)(s) = e^{-as}\mathcal{L}f(s)$ und $\mathcal{L}\left(f(t+a)\right)(s) = e^{as}\left(\mathcal{L}f(s) - \int_0^a e^{-at}f(t)\mathrm{d}t\right)$,
- Dämpfung: $\mathcal{L}\left(e^{-at}f(t)\right)(s) = \mathcal{L}f(s+a)$,
- Ableitungseigenschaft: $\mathcal{L}f'(s) = s\mathcal{L}f(s) - f(0)$,
- Allgemeine Ableitungseigenschaft: $\mathcal{L}f^{(n)}(s) = s^n\mathcal{L}f(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$,
- Differenzierbarkeit: $\left(\mathcal{L}f\right)^{(n)}(s) = \mathcal{L}\left((-t)^n f(t)\right)(s)$,
- Integrationseigenschaft: $\mathcal{L}g(s) = \frac{\mathcal{L}f(s)}{s}$ für $g(t) = \int_0^t f(u)\mathrm{d}u$,

Laplacetransformation

Eigenschaften der Laplacetransformation:

- Linearität: $\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}f + b\mathcal{L}g$,
- Zeit-Skalierung: $\mathcal{L}\left(f(at)\right)(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\left(f(t)\right)\left(\frac{s}{a}\right)$,
- Verschiebung: $\mathcal{L}\left(f(t-a)\right)(s) = e^{-as}\mathcal{L}f(s)$ und $\mathcal{L}\left(f(t+a)\right)(s) = e^{as}\left(\mathcal{L}f(s) - \int_0^a e^{-at}f(t)\mathrm{d}t\right)$,
- Dämpfung: $\mathcal{L}\left(e^{-at}f(t)\right)(s) = \mathcal{L}f(s+a)$,
- Ableitungseigenschaft: $\mathcal{L}f'(s) = s\mathcal{L}f(s) - f(0)$,
- Allgemeine Ableitungseigenschaft: $\mathcal{L}f^{(n)}(s) = s^n\mathcal{L}f(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$,
- Differenzierbarkeit: $\left(\mathcal{L}f\right)^{(n)}(s) = \mathcal{L}\left((-t)^n f(t)\right)(s)$,
- Integrationseigenschaft: $\mathcal{L}g(s) = \frac{\mathcal{L}f(s)}{s}$ für $g(t) = \int_0^t f(u)\mathrm{d}u$,
- Integration: $\int_s^\infty \mathcal{L}f(u)\mathrm{d}u = \mathcal{L}\left(t^{-1}f(t)\right)(s)$.

Laplacetransformation

Die Faltung zweier Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ ist definiert als

$$(f * g)(t) = f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Für die Laplacetransformation gilt der Faltungssatz

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \mathcal{L}f(s)\mathcal{L}g(s).$$

Laplacetransformation

Die Faltung zweier Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ ist definiert als

$$(f * g)(t) = f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Für die Laplacetransformation gilt der Faltungssatz

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \mathcal{L}f(s)\mathcal{L}g(s).$$

Die Laplacetransformation einer P-periodischen Funktion $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ $(P > 0)$ ist

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{1-e^{-sP}} \int_0^P e^{-st} f(t)\mathrm{d}t.$$

Laplacetransformation

Wir betrachten nun ein Beispiel für die inverse Laplacetransformation.

Sei $\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s^2+1}$ und wir wissen, dass

$$\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s} \text{ und } \mathcal{L}(\sin(t))(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Damit gilt auch $\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}(1)(s) \cdot \mathcal{L}(\sin(t))(s)$.

Laplacetransformation

Wir betrachten nun ein Beispiel für die inverse Laplacetransformation.

Sei $\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s^2+1}$ und wir wissen, dass

$$\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s} \text{ und } \mathcal{L}(\sin(t))(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Damit gilt auch $\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}(1)(s) \cdot \mathcal{L}(\sin(t))(s)$.

Mit dem Faltungssatz findet man $\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}(1 * \sin(t))(s)$. Damit erhält man

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}(1 * \sin(t))(t) = 1 * \sin(t) = \int_0^t 1 \cdot \sin(u)\mathrm{d}u = 1 - \cos(t).$$

Laplacetransformation

Wir betrachten die folgende gewöhnliche Differentialgleichung

$$x'(t) + 2x(t) = 2t - 4, \text{ mit } x(0) = 1.$$

Laplacetransformation

Wir betrachten die folgende gewöhnliche Differentialgleichung

$$x'(t) + 2x(t) = 2t - 4, \text{ mit } x(0) = 1.$$

Schritt 1: Anwendung der Laplacetransformation

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x' + 2x\} = \mathcal{L}(2t-4) &\iff \mathcal{L}\{x'\} + 2\mathcal{L}x = 2\mathcal{L}(t) - 4\mathcal{L}(1) \\ &\iff s\mathcal{L}x(s) - x(0) + 2\mathcal{L}x(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s}.\end{aligned}$$

Laplacetransformation

Wir betrachten die folgende gewöhnliche Differentialgleichung

$$x'(t) + 2x(t) = 2t - 4, \text{ mit } x(0) = 1.$$

Schritt 2: Auflösen nach $\mathcal{L}x$

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{2}{s^2(s+2)} - \frac{4}{s(s+2)} + \frac{1}{s+2}.$$

Wir betrachten die folgende gewöhnliche Differentialgleichung

$$x'(t) + 2x(t) = 2t - 4, \text{ mit } x(0) = 1.$$

Schritt 3: Berechnen der inversen Laplacetransformation

$$\begin{aligned} x(s) &= 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+2)}\right) - 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s+2)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) \\ &= 2\left(t * e^{-2t}\right)(t) - 4\left(1 * e^{-2t}\right)(t) + e^{-2t} \\ &= 2\int_0^t (t-\tau)e^{-2\tau}\mathrm{d}\tau - 4\int_0^t 1 \cdot e^{-2\tau}\mathrm{d}\tau + e^{-2t} \\ &= t + \frac{7e^{-2t} - 5}{2}. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir eine weitere Differentialgleichung, für welche wir die Partialbruchzerlegung benötigen

$$
\begin{aligned}
&x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = 10, \\
&\text{mit } x'(0) = x(0) = 0.
\end{aligned}
$$

Nun betrachten wir eine weitere Differentialgleichung, für welche wir die Partialbruchzerlegung benötigen

$$x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = 10,$$
$$\text{mit } x'(0) = x(0) = 0.$$

Schritt 1: Anwendung der Laplacetransformation

$$\mathcal{L}\{x''\} + 5\mathcal{L}\{x'\} + 4\mathcal{L}\{x\} = 10\mathcal{L}(1).$$

Nun betrachten wir eine weitere Differentialgleichung, für welche wir die Partialbruchzerlegung benötigen

$$x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = 10,$$
$$\text{mit } x'(0) = x(0) = 0.$$

Schritt 2: Auflösen nach $\mathcal{L}x$

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{10\mathcal{L}(1)}{4 + 5s + s^2} = \frac{10}{s(s+1)(s+4)}.$$

Nun betrachten wir eine weitere Differentialgleichung, für welche wir die Partialbruchzerlegung benötigen

$$\begin{aligned} &x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = 10, \\ &\text{mit } x'(0) = x(0) = 0. \end{aligned}$$

Schritt 3: Anwenden der Partialbruchzerlegung

Mit den Konstanten A, B, C machen wir den Ansatz (reelle Nullstellen)

$$\frac{10}{s(s+1)(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+4}.$$

Man findet

$$\mathcal{L}x(s) = 10\left(\frac{1}{4s} - \frac{1}{3(s+1)} + \frac{1}{12(s+4)}\right).$$

Nun betrachten wir eine weitere Differentialgleichung, für welche wir die Partialbruchzerlegung benötigen

$$x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = 10,$$
$$\text{mit } x'(0) = x(0) = 0.$$

Schritt 4: Berechnen der inversen Laplacetransformation

$$x(t) = 10\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{12}e^{-4t}\right).$$